HTWD, FB Informatik/Mathematik
Prof. Dr. M. Voigt

Arbeitsblatt 5

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

a wird **Realteil** von z genannt: $a = Re(z)$
b ist der **Imaginärteil** von z: $b = Im(z)$

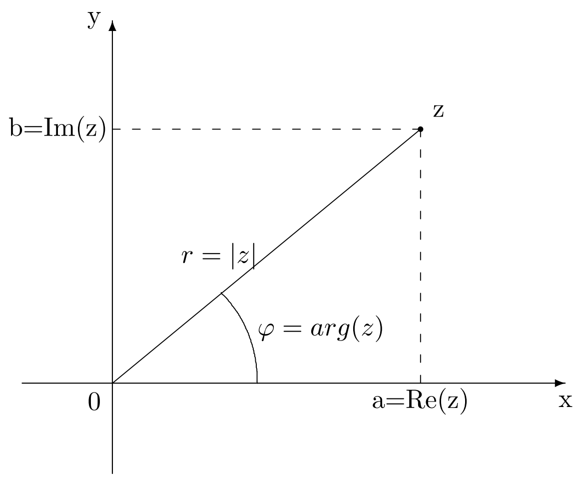
Die Gaußsche Zahlenebene

Bezeichnungen

- Betrag: $r = |z| \geq 0$ Länge der Strecke von z zum Ursprung
- Argument: $arg(z) = \varphi$ Winkel zwischen positiver x-Achse und der Strecke von 0 nach z

Bemerkung:

φ ist nicht eindeutig, der **Hauptwert** von $arg(z)$ liegt in $[-\pi, \pi)$



Darstellungsformen:

Bezeichnung	**Schreibweise**
arithmetische Form	$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$
trigonometrische Form	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
exponentielle Form	$z = re^{i\varphi}$

Hintergrund: Eulersche Formel
$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$

Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen:

- trigonometrisch/exponentiell $\to$ arithmetisch
  Gegeben: $|z| = r, arg(z) = \varphi \Rightarrow$
  $a = Re(z) = r\cos\varphi$
  $b = Im(z) = r\sin\varphi$
- arithmetisch $\to$ trigonometrisch/exponentiell
  Gegeben: $Re(z) = a, Im(z) = b \Rightarrow$
  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
  $\varphi = arg(z)$ bestimmbar aus: $\cos\varphi = a/r, \sin\varphi = b/r, \varphi \in [-\pi, \pi)$

Rechenregeln: für $z = a + ib = r_z e^{i\varphi_z}$ und $w = c + id = r_w e^{\varphi_w}$

Gleichheit	$z = w$ d.h. $a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
Addition/Subtraktion	$z \pm w = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$
Multiplikation	$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
	$r_z e^{i\varphi_z} \cdot r_w e^{i\varphi_w} = r_z r_w e^{i(\varphi_z + \varphi_w)}$
Division	$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(-ad+bc)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}$
	$= \frac{r_z e^{i\varphi_z}}{r_w e^{i\varphi_w}} = \frac{r_z}{r_w} e^{i(\varphi_z - \varphi_w)}$
Potenzen	$z^n = (r_z e^{i\varphi_z})^n = r_z^n e^{in\varphi_z}$ $(n \in \mathbb{N})$
Wurzeln	$z^n = w = r_w e^{i\varphi_w} = r_w e^{i(\varphi_w + 2k\pi)} \Rightarrow z = \sqrt[n]{r_w} e^{i\frac{\varphi_w + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$