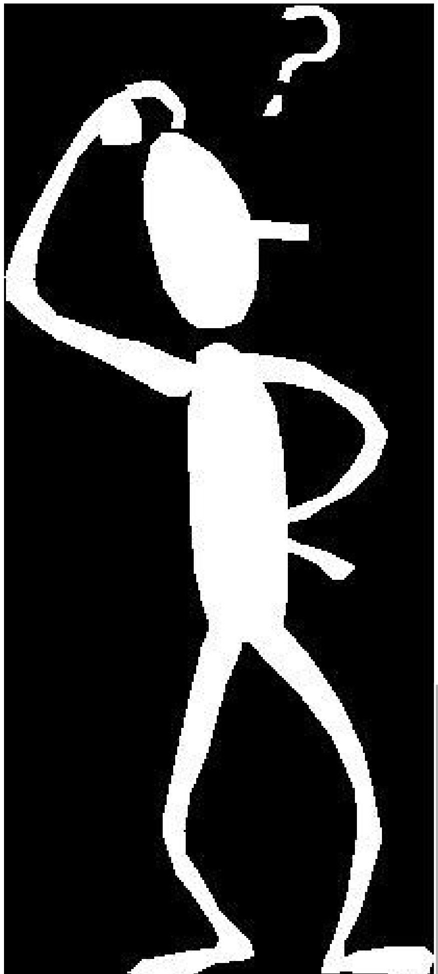
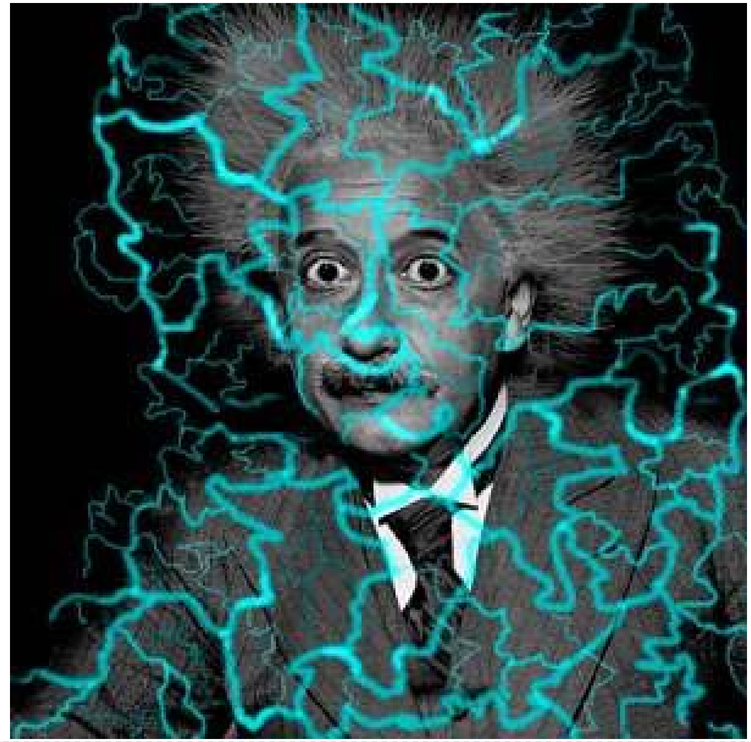


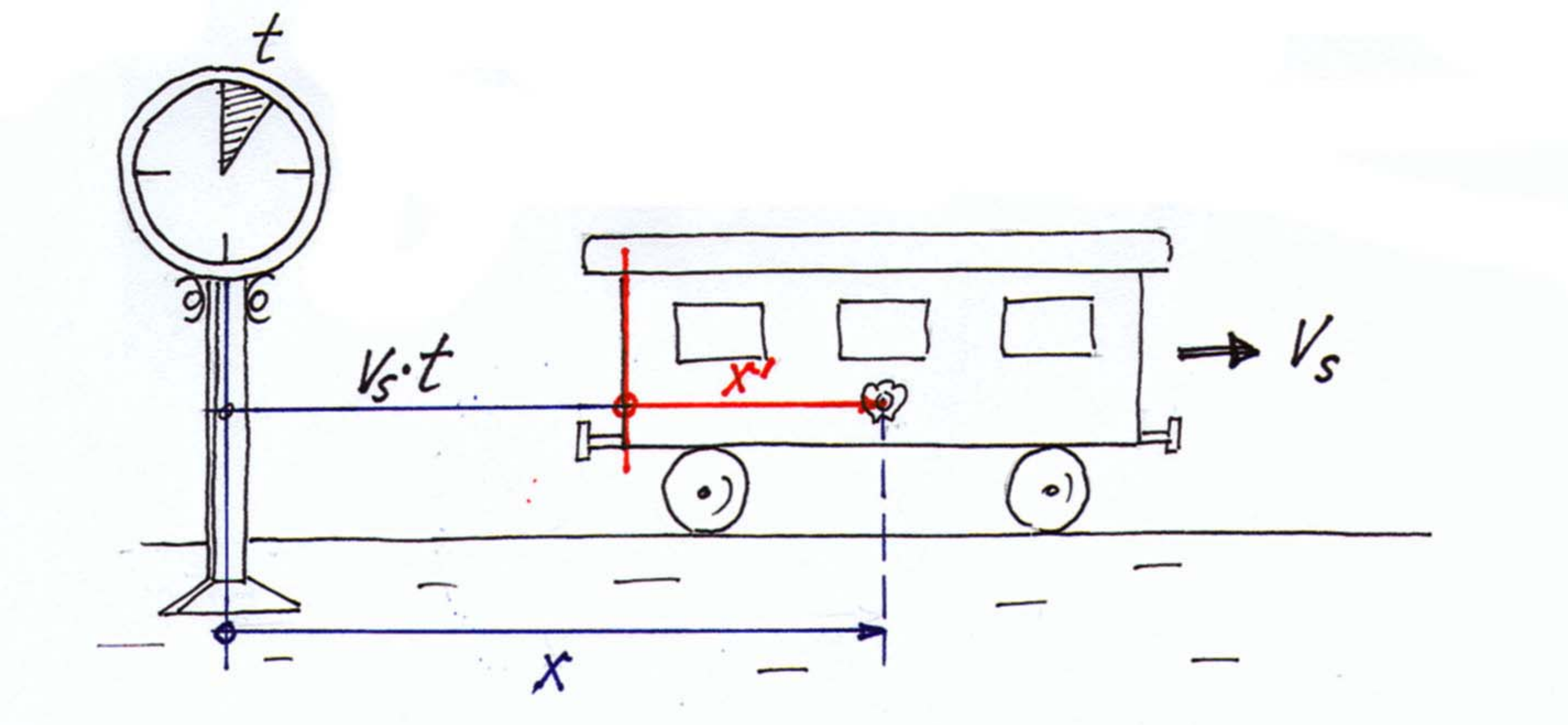


Relativitätstheorie für Fußgänger

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH)
University of Applied Sciences

Lehrbereich Physik
V. Christoph, W. Heimke, M. Starke

GALILEI-Transformation



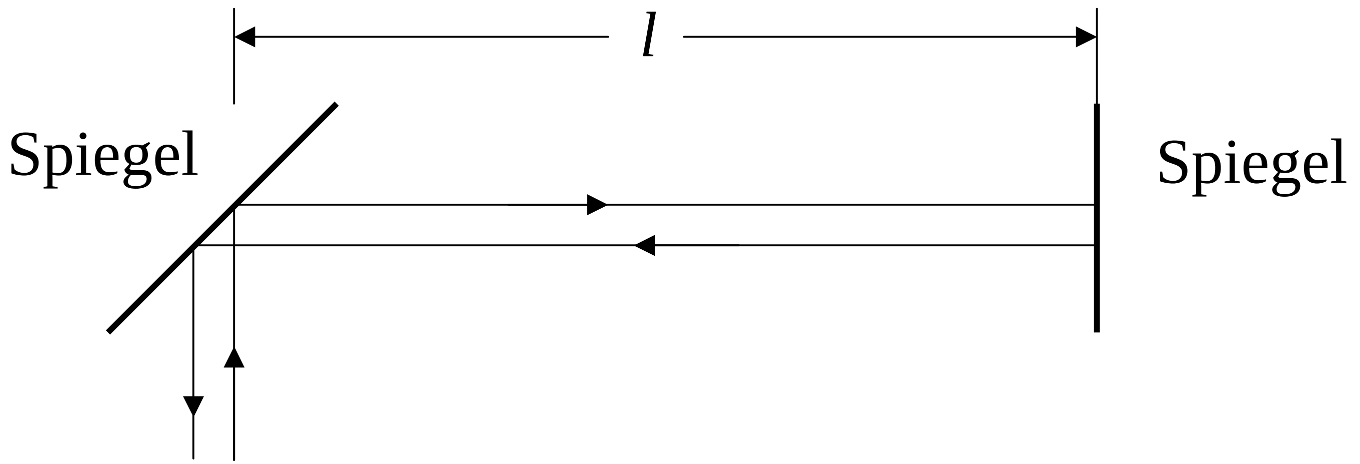
Geschwindigkeits-Addition

$$x = x' + v_s\, t$$

$$t = t'$$

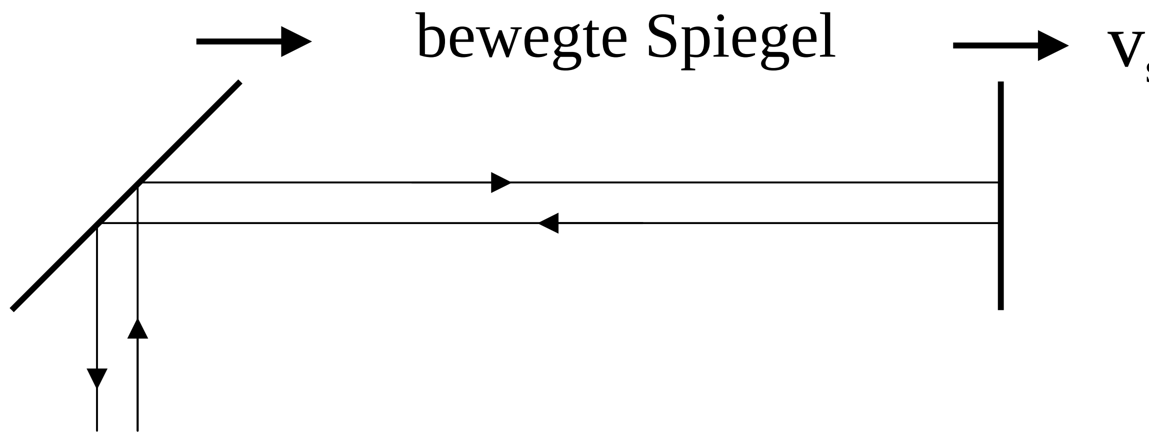
$$v = v' + v_s$$

Test mit „Lichtuhr“



System S

$$t = t_1 + t_2 = 2\frac{l}{c}$$



System S´

$$t = t_1 + t_2 \qquad t_1 = \frac{l}{c - v} \qquad t_2 = \frac{l}{c + v}$$

$$t = \frac{2lc}{c^2 - v_s^2}$$

LORENTZ-Transformation

$$x = a_{11}x' + a_{12}t'$$
$$t = a_{21}x' + a_{22}t'$$

Forderungen an a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} :

1. Nullpunkt des Koordinatensystems S bewegt sich im

   Koordinatensystem S´ mit Geschwindigkeit – v_s (nach links).

$$a_{11}\,x' + a_{12}\,t' = 0 \qquad x' = -\frac{a_{12}}{a_{11}}t' \qquad \to \qquad v_s = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

2. Austausch der Systeme S und S´ (d. h. x ↔ x´ ; t ↔ t´) darf keine Änderung der Transformation zur Folge haben.

$$x = a_{11} \left(x' + v_s t' \right)$$

$$t = \frac{a_{11}^2 - 1}{a_{11} v_s} x' + a_{11} t'$$

3. Ist die Geschwindigkeit im System S gleich der Lichtgeschwindigkeit c, so ist auch im System S die Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit c.

$$\frac{x}{t} = \frac{a_{11}\left(\frac{x'}{t'} + v_s\right)}{\frac{a_{11}^2 - 1}{a_{11} v_s}\,\frac{x'}{t'} + a_{11}} \quad , \quad \frac{x}{t} = c \quad \leftrightarrow \quad \frac{x'}{t'} = c$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}}$$

LORENTZ-Transformation

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(x' + v_s \; t'\right) \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(x - v_s \, t\right)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(\frac{v_s}{c^2} x' + t'\right) \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(-\frac{v_s}{c^2} x + t\right)$$

$$y = y'$$

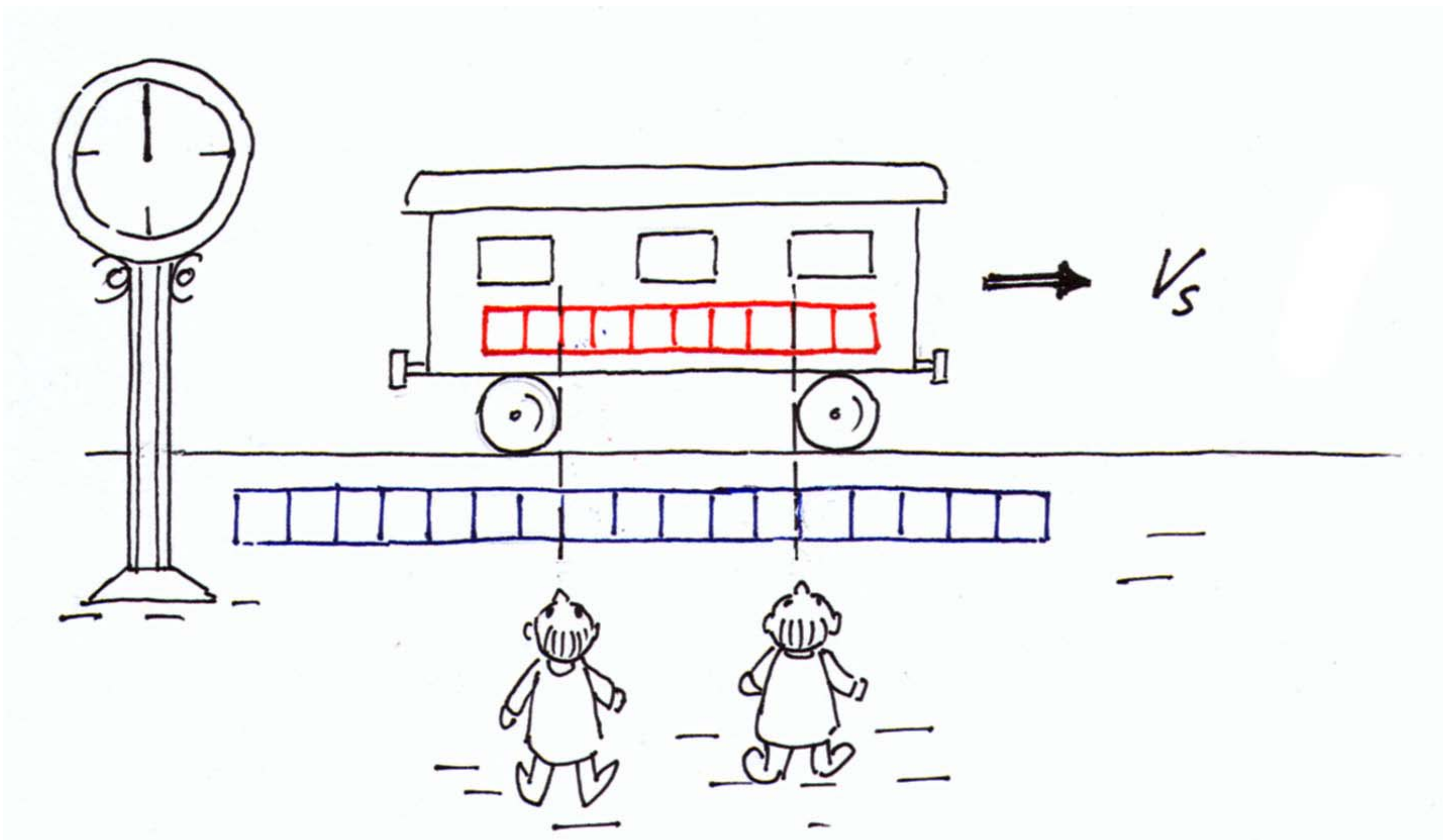
$$z = z'$$

Addition von Geschwindigkeiten

$$v = \frac{v' + v_s}{1 + \frac{v_s v'}{c^2}}$$

Längenkontraktion

Zwei Beobachter, die einen Abstand voneinander aufweisen, beobachten aus ihrem System heraus (zu einem festen Zeitpunkt) einen Maßstab, der in dem bewegten System mitgeführt wird und stellen auf diesem eine Längendifferenz fest:

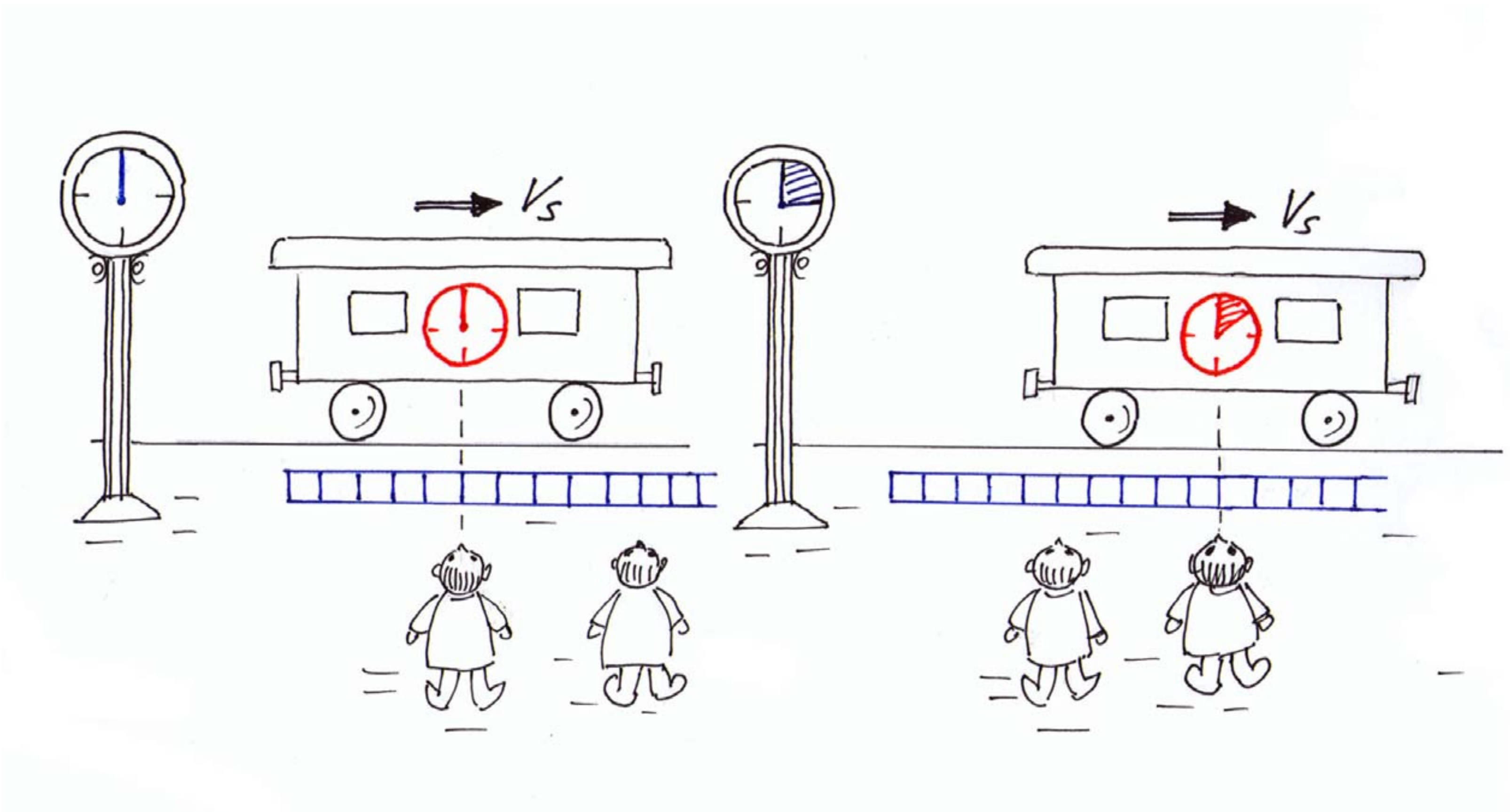


$$x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(x_2 - x_1 - v_s \left(t_2 - t_1\right)\right)$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \quad \rightarrow \quad \Delta x < \Delta x' \quad \text{Längenkontraktion}$$

Zeitdilatation

Zwei Beobachter im ruhenden System beobachten eine Uhr, die im bewegten System an einem festen Ort (in diesem System!) mitgeführt wird, und vergleichen ihre Uhr mit der Anzeige der beobachteten Uhr.



$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2}} \left(\frac{v_s}{c^2} \left(x'_2 - x'_1 \right) + \left(t'_2 - t'_1 \right) \right)$$

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \left(\frac{v_s}{c}\right)^2} \; \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta t' < \Delta t$$ Zeitdilatation

Beispiel: Myon, Zwillingsparadoxon

Relativistische Bewegungsgleichung

Beschleunigung einer im bewegten System S´ anfänglich ruhenden Masse ($v' = 0$) durch kurzzeitiges Einwirken einer Kraft F in diesem System:

NEWTONsche Bewegungsgleichung:

$$m_0 \, dv' = F \, dt'$$

$$m_0 - \text{Ruhemasse}$$

System S´ | System S

$$0 \to dv' \qquad\qquad v \to v + dv$$

Additionstheorem der Geschwindigkeiten (mit $v_s = v$):

$$\frac{v + dv'}{1 + \frac{v\ dv'}{c^2}} = v + dv \qquad dv' = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

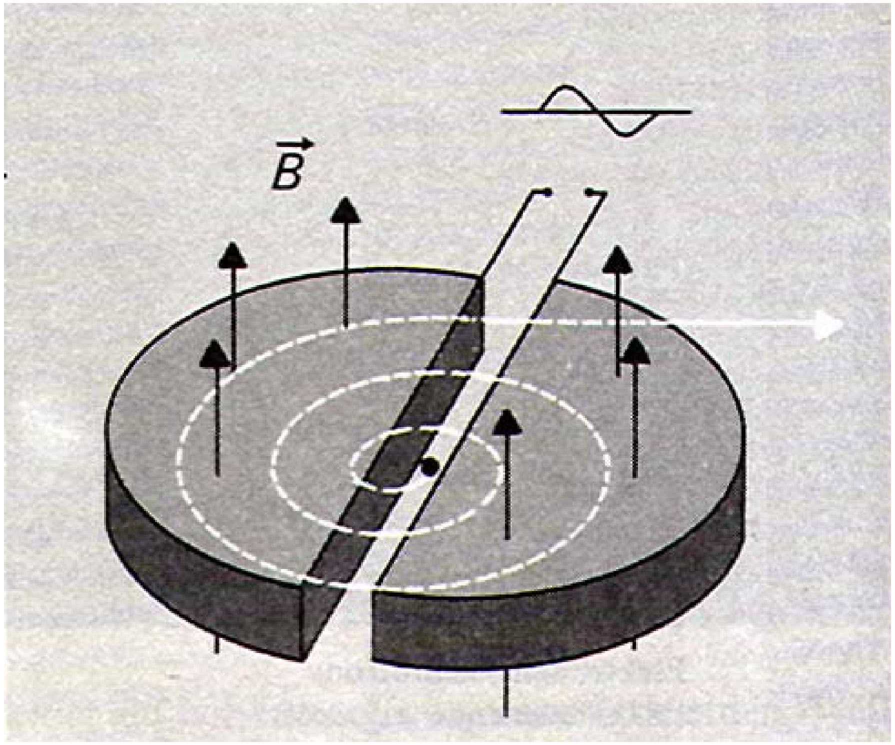
Außerdem ist die Zeitdilatation zu berücksichtigen:

$$dt' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\ dt \qquad \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = F$$

kann geschrieben werden als:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \qquad \text{mit} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Massenzunahme in Beschleunigern



Relativistische mechanische Energie

Energiezuwachs durch die Leistung,
die zum Beschleunigen benötigt wird:

$$E = \int P \quad dt \qquad \text{mit} \qquad P = Fv \qquad \text{und} \qquad F = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \; \frac{dv}{dt}$$

$$E = \int \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} v \quad dv \qquad \rightarrow \qquad E = \frac{m_0 \; c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

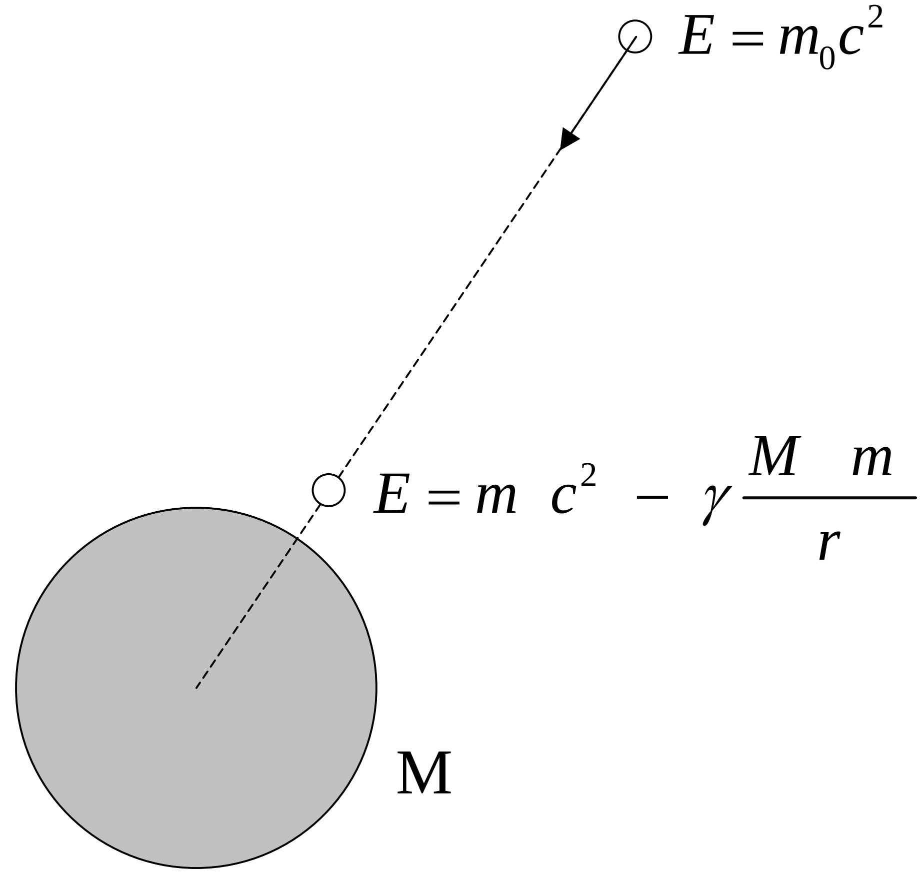
$$\mathbf{E=mc^2}$$

Entwicklung in TAYLOR-Reihe (für $v/c \ll 1$):

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \ldots\ldots$$

Klassische Mechanik ist in relativistischer Mechanik als Grenzfall enthalten.

Bewegung im Gravitationsfeld



Gravitationskraft

$$F = -\gamma \frac{M\ m}{r^2}$$

potentielle Energie

$$E_{pot} = -\gamma \frac{M\ m}{r}$$

Energieerhaltung:

$$m\ c^2 - \gamma \frac{M\ m}{r} = m_0\ c^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

für nicht zu kleine Abstände r ergibt sich:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{R_S}{r} \qquad \text{mit} \quad R_S = \frac{2 \;\; \gamma \;\; M}{c^2}$$

SCHWARZSCHILD-Radius

Erde $\mathrm{R_S} \cong 9$ mm

Zeitdilatation

$$\Delta t' = \Delta t \;\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad\qquad \Delta t' = \Delta t \;\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}$$

Gravitationsrotverschiebung

Invarianzeigenschaft gegenüber

LORENTZ-Transformation

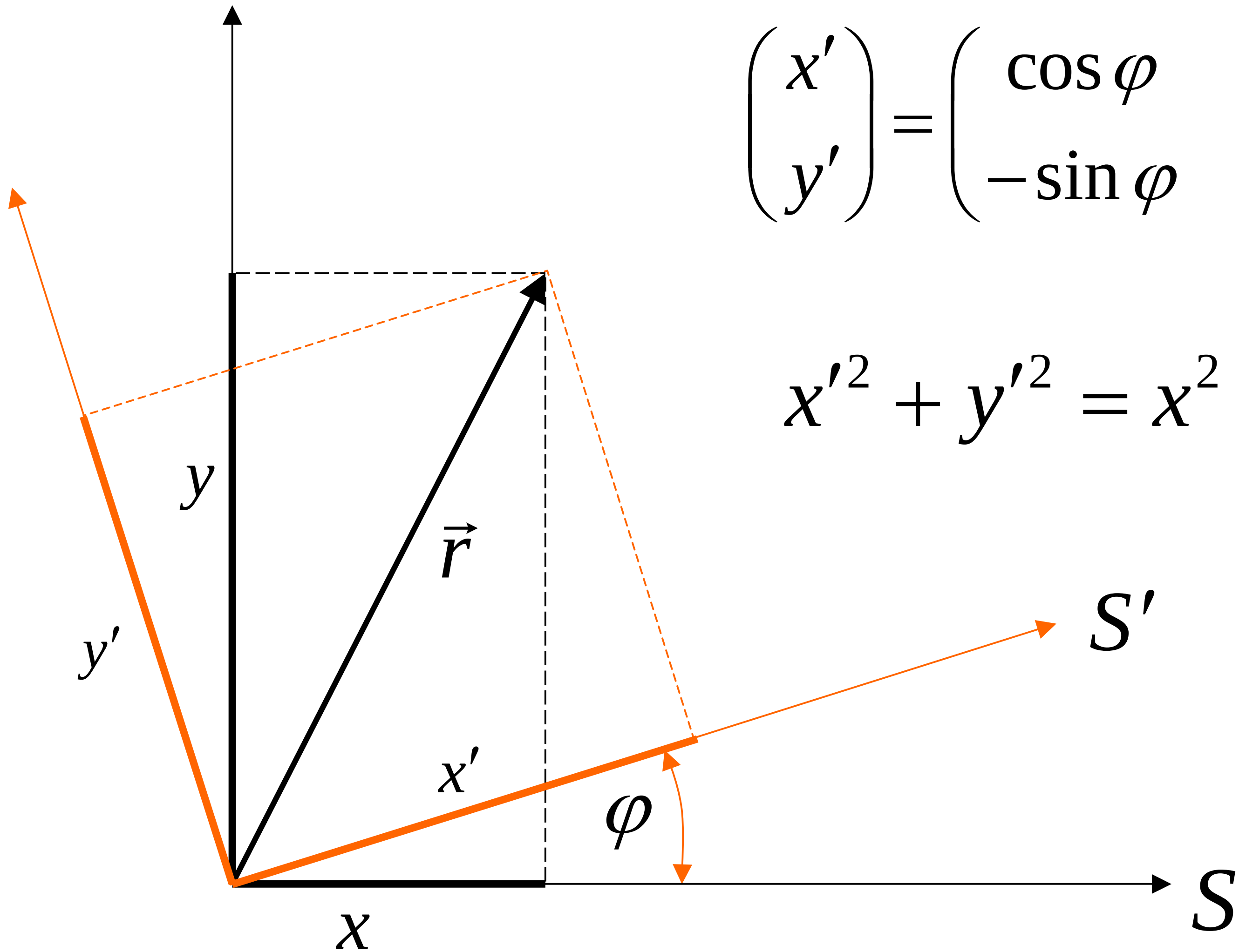
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = r^2$$



Beispiel für vektorielle Formel im 3-d Raum: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

LORENTZ-Transformation = Drehung im 4-dimensionalen Raum

Physikalische Gleichungen dürfen nicht von den zufällig gewählten Koordinatensystemen abhängen!

Deshalb: Übergang zu Vektordarstellung

Beispiele für Vierer-Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c\ t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{r} \\ c\ t \end{pmatrix}$$

Ortsvektor in der „Raum-Zeit“

$$\begin{pmatrix} c\ \vec{p} \\ E \end{pmatrix}$$

Energie-Impuls-Vektor

Invarianz gegenüber
LORENTZ-Transformation

$$\left(c\ \vec{p}\right)^2 - E^2 = \left(m_0\ c^2\right)^2$$

$$E = c\sqrt{\left(m_0\ c\right)^2 + \vec{p}^{\,2}} \Rightarrow E = c\left|\vec{p}\right| \quad \text{Photon}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{j} \\ \rho \;\; c \end{pmatrix}$$

Ladungs-Stromdichte-Vektor

$$\begin{pmatrix} \vec{A} \\ U/c \end{pmatrix}$$

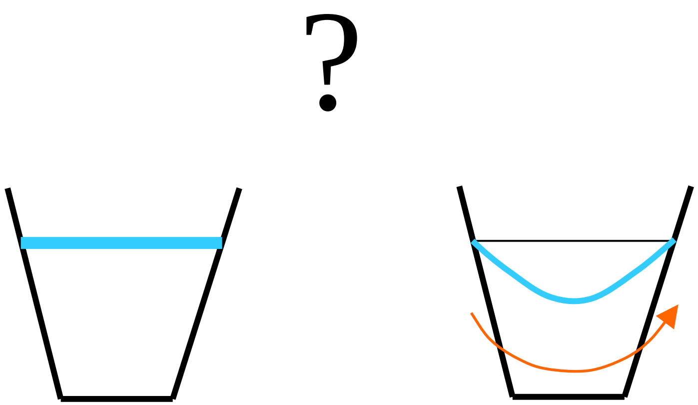
Viererpotential

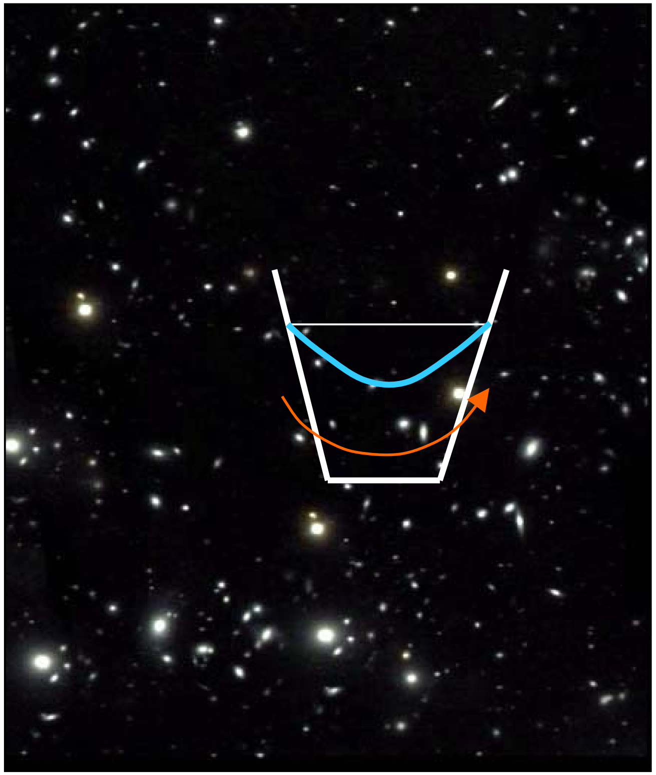
Besonders wichtig: Linienelement ds = differentieller Abstand zweier Punkte in der Raum-Zeit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \; dt^2}$$

kräftefreie Bewegung erfolgt so, dass $\int ds \to Min.$ $\quad \delta \int ds = 0$

Experimente und „Gedankenexperimente“ zur Allgemeinen Relativitätstheorie

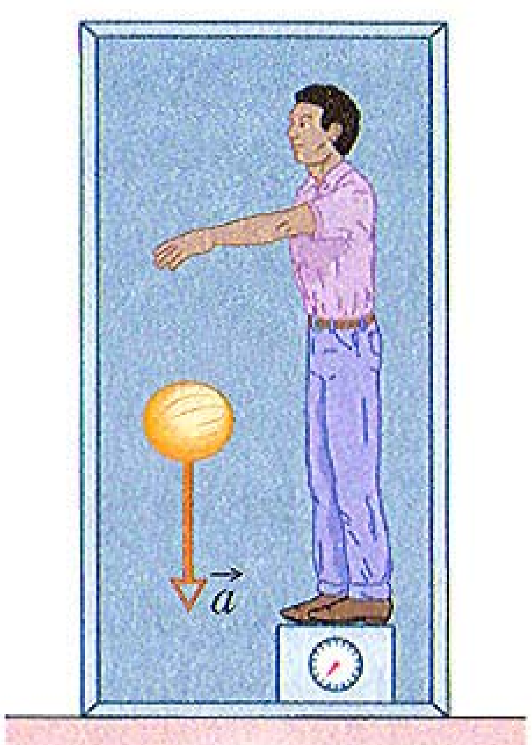


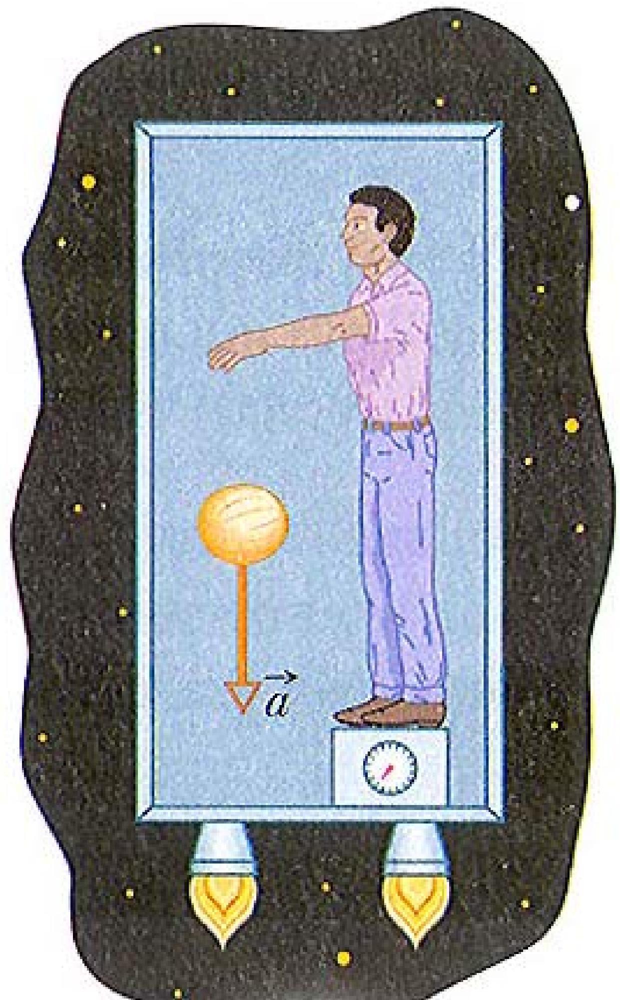


Machsches Prinzip (es existiert keine absolute Beschleunigung)

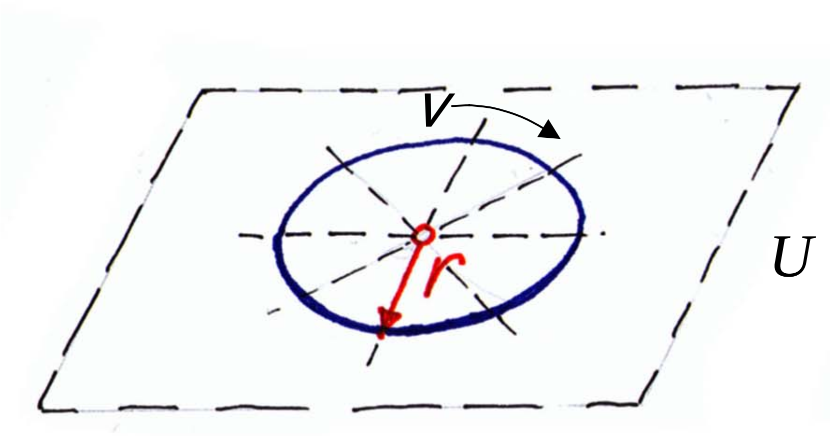
Äquivalenz von träger und schwerer Masse $(m_t\, a = m_s\, g)$
EÖTVÖS – Drehwaage

Trägheitskraft und Schwerkraft lokal ununterscheidbar

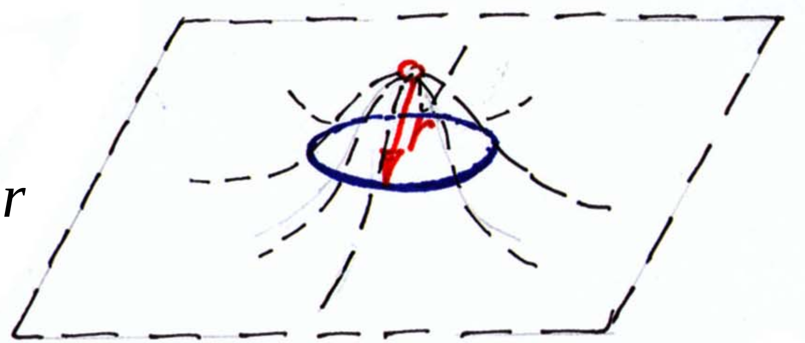




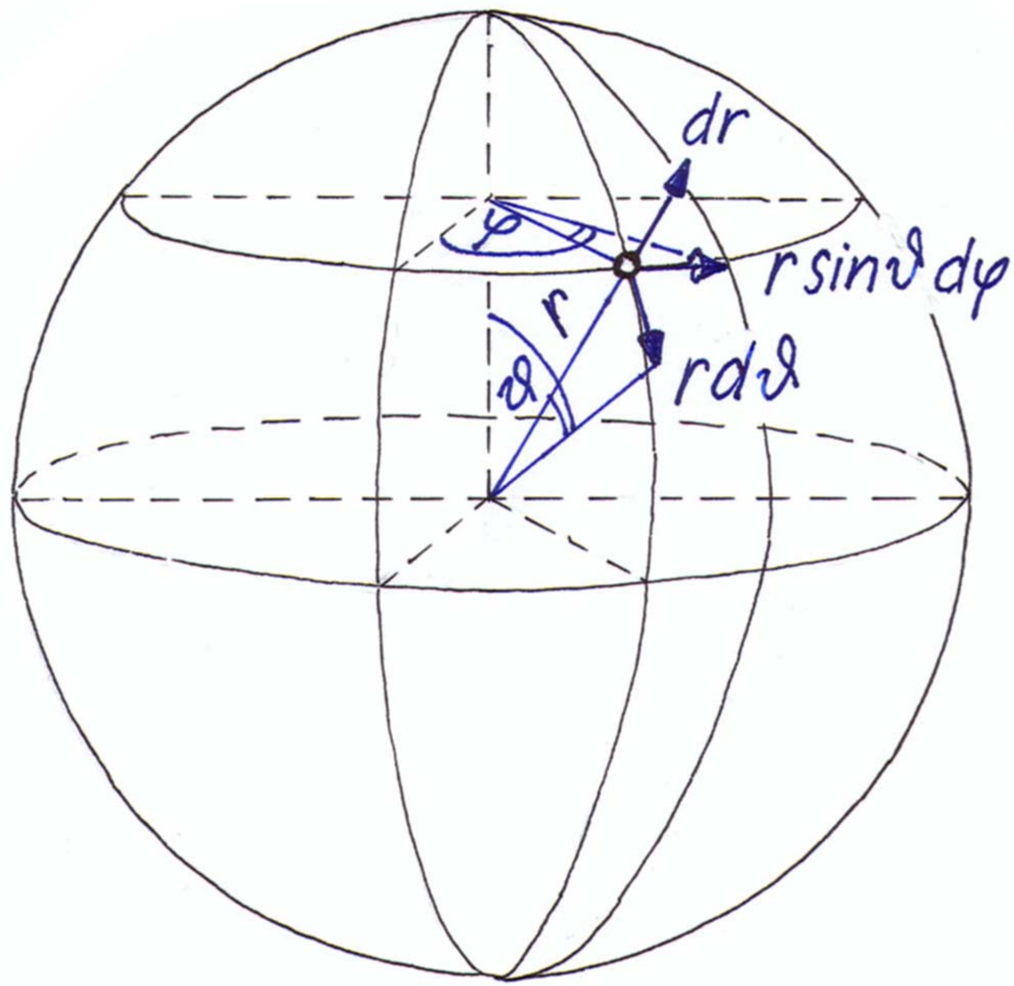
Euklidische Geometrie nicht mehr zutreffend



$U < 2\pi r$



Trägheitskräfte und Schwerkräfte können durch geeignete Wahl der Koordinaten lokal beseitigt werden
(ortsabhängige „krummlinige“ Kordinaten)



Allgemeine Relativitätstheorie = GEOMETRODYNAMIK

Äquivalenzprinzip:

In einem Gravitationsfeld kann an jedem Weltpunkt ein lokales Koordinatensystem gewählt werden, in dem die physikalischen Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie gelten.

„krummlinige“ Koordinaten $x_\alpha = f\left(x, y, z, t\right) \quad \left(\alpha = 1, \ldots, 4\right)$

Allgemeines Linienelement:

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta} \quad dx_\alpha \quad dx_ß$$

$g_{\alpha\beta}$ - metrischer Tensor, ortsabhängig

EINSTEINsche Feldgleichungen (10 nichtlineare gekoppelte partielle Differentialgleichungen):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \ g_{\alpha\beta} = - \frac{8\pi\gamma}{c^4} \ T_{\alpha\beta}$$

$R_{\alpha\beta}$ - Krümmungstensor

$T_{\alpha\beta}$ - Energie-Impuls-Tensor

daraus Linienelement $(ds)^2$ bestimmbar

Kräftefreie Bewegung erfolgt
wie oben entsprechend:

$$\delta \int ds = 0 \qquad \text{(Geodäte)}$$

Beispiel für Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen:

SCHWARZSCHILD-Lösung (unbewegte Kugel konstanter Massendichte):

$$(ds)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{R_S}{r}} + r^2 \sin^2(\vartheta)\ (d\varphi)^2 + r^2\ (d\vartheta)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) (c\ dt)^2$$

R_S = SCHWARZSCHILD-Radius