

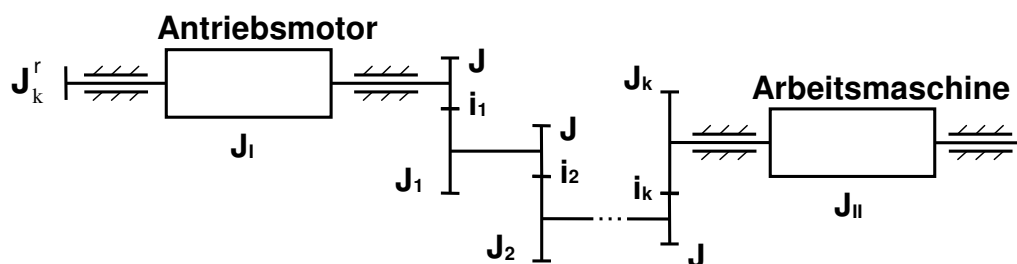
Reduziertes Massenträgheitsmoment eines k-stufigen Zahnradgetriebes

Praktische Aufgabenstellung zur Überprüfung der Leistungsfähigkeit des Moduls **OPTIMA** im Programmpaket **APPROX für Windows**

Präzisierung:

Ermittlung optimaler Übersetzungen für ein Minimum des auf die Antriebswelle reduzierten Massenträgheitsmomentes über die
Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems

Technisches Modell



Gleichung des reduzierten Massenträgheitsmomentes für **k**-stufige Zahnradgetriebe:

$$J_k^r = (J_I + J) + J_{II} \frac{1}{i_1^2} + J \left[\sum_{p=1}^{k-1} \left[(1 + i_p^4) \frac{1}{\prod_{j=1}^p i_j^2} \right] + i_k^4 \frac{1}{\prod_{m=1}^k i_m^2} \right]$$

Mathematisches Modell

Allgemeiner Ansatz für das Massenträgheitsmoment eines **10-stufigen Zahnradgetriebes**:

$$J^r = J_{10}^r = J_I + J + (J_I + J)/i_1^2 + (J_2 + J)/(i_1^2 i_2^2) + (J_3 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2) + (J_4 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2) + (J_5 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2) + (J_6 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2) + (J_7 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2) + (J_8 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2) + (J_9 + J)/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2 i_9^2) + (J_{10} + J_{II})/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2 i_9^2 i_{10}^2)$$

$$J_1 = J i_1^4, J_2 = J i_2^4 \text{ usw. } i_{10} = i/(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8 i_9) \quad i: \text{ Gesamtübersetzung des Zahnradgetriebes}$$

Mathematisches Modell

Allgemeine Gleichung mit allen Anteilen:

$$J_{10}^r = J_I + J_{II}/i + J(1 + i_1^2 + 1/i_1^2 + i_2^2/i_1^2 + 1/(i_1^2 i_2^2) + i_3^2/(i_1^2 i_2^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2) + i_4^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2) + i_5^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2) + i_6^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2) + i_7^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2) + i_8^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2) + i_9^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2 i_9^2) + i^2/(i_1^4 i_2^4 i_3^4 i_4^4 i_5^4 i_6^4 i_7^4 i_8^4 i_9^4))$$

Mathematisches Modell

Spezielle Gleichung mit variablen Anteilen:

$$\mathbf{J}_{10}^r = i_1^2 + 1/i_1^2 + i_2^2/i_1^2 + 1/(i_1^2 i_2^2) + i_3^2/(i_1^2 i_2^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2) + i_4^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2) + i_5^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2) + i_6^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2) + i_7^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2) + i_8^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2) + i_9^2/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2) + 1/(i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 i_5^2 i_6^2 i_7^2 i_8^2 i_9^2) + i^2/(i_1^4 i_2^4 i_3^4 i_4^4 i_5^4 i_6^4 i_7^4 i_8^4 i_9^4)$$

Optimierungsmodell

Zielfunktion $F(\mathbf{X})$, gebildet aus $\mathbf{J}_{10}^r$

Variablen $\mathbf{x}_1 = i_1^2$, $\mathbf{x}_2 = i_2^2$... $\mathbf{x}_9 = i_9^2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = x_1 + 1/x_1 + x_2/x_1 + 1/(x_1 x_2) + x_3/(x_1 x_2) + 1/(x_1 x_2 x_3) + x_4/(x_1 x_2 x_3) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4) + x_5/(x_1 x_2 x_3 x_4) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) + x_6/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) + x_7/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) + x_8/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) + x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) + 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9) + i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) := \text{Minimum!}$$

Erste Ableitungen der sich aus $\mathbf{J}_{10}^r$ ergebenden Zielfunktion nach den Variablen:

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_1 = 1 - 1/x_1^2 - x_2/(x_1^3) - 1/(x_2 x_1^2) - x_3/(x_2 x_1^2) - 1/(x_1^2 x_2 x_3) - x_4/(x_1^2 x_2 x_3) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4) - x_5/(x_1^2 x_2 x_3 x_4) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5) - x_6/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) - x_7/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) - x_8/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - x_9/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_2 = 1/x_1 - 1/(x_1 x_2^2) - x_3/(x_1 x_2^2) - 1/(x_1 x_2^2 x_3) - x_4/(x_1 x_2^2 x_3) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4) - x_5/(x_1 x_2^2 x_3 x_4) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5) - x_6/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6) - x_7/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) - x_8/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - x_9/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_3 = 1/(x_1 x_2) - 1/(x_1 x_2 x_3^2) - x_4/(x_1 x_2 x_3^2) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4) - x_5/(x_1 x_2 x_3^2 x_4) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5) - x_6/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6) - x_7/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7) - x_8/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - x_9/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_4 = 1/(x_1 x_2 x_3) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2) - x_5/(x_1 x_2 x_3 x_4^2) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5) - x_6/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6) - x_7/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7) - x_8/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7 x_8) - x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^3 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_5 = 1/(x_1 x_2 x_3 x_4) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2) - x_6/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6) - x_7/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7) - x_8/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7 x_8) - x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^3 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_6 = 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2) - x_7/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7) - x_8/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7 x_8) - x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^3 x_7^2 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_7 = 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7^2) - x_8/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7^2) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7^2 x_8) - x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7^2 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7^2 x_8 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^3 x_8^2 x_9^2) = 0$$

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_8 = 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8^2) - x_9/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8^2) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8^2 x_9) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^3 x_9^2) = 0$$

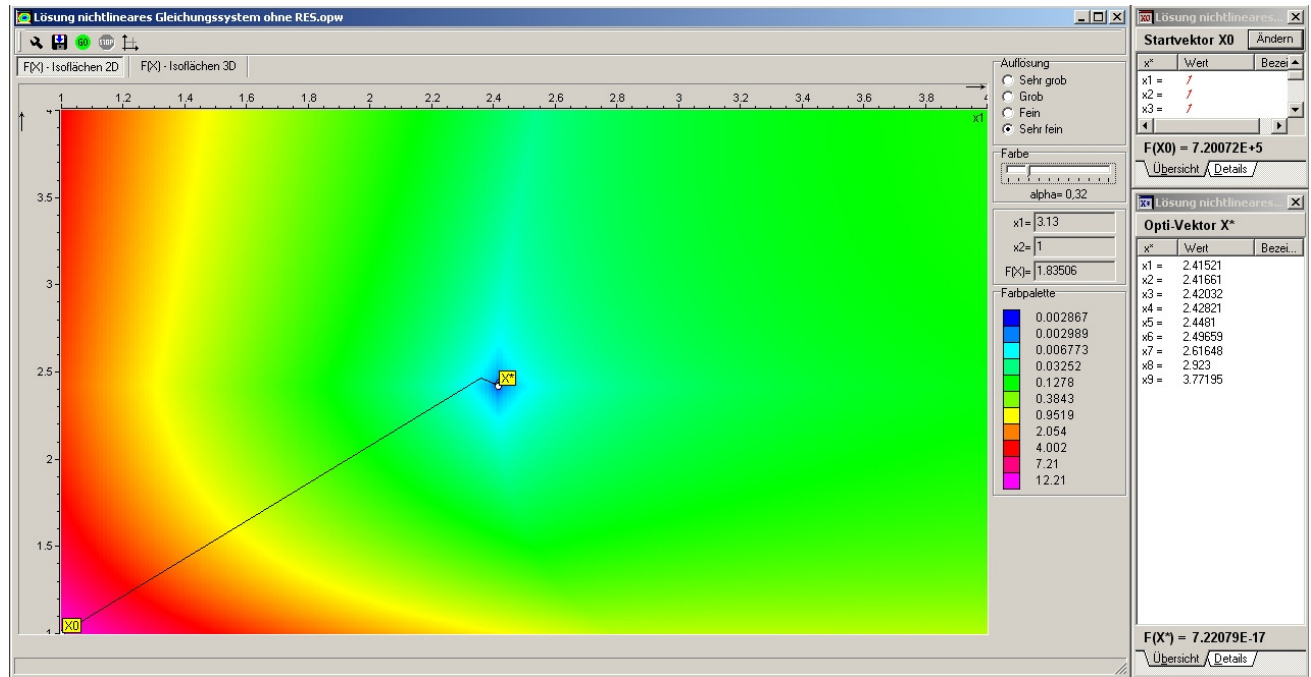
$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}_9 = 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) - 1/(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9^2) - 2i^2/(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2 x_8^2 x_9^3) = 0$$

Für die Gesamtübersetzung $i = 200$ konnten folgende optimale Variablenwerte berechnet werden, die den Teilübersetzungen entsprechen:

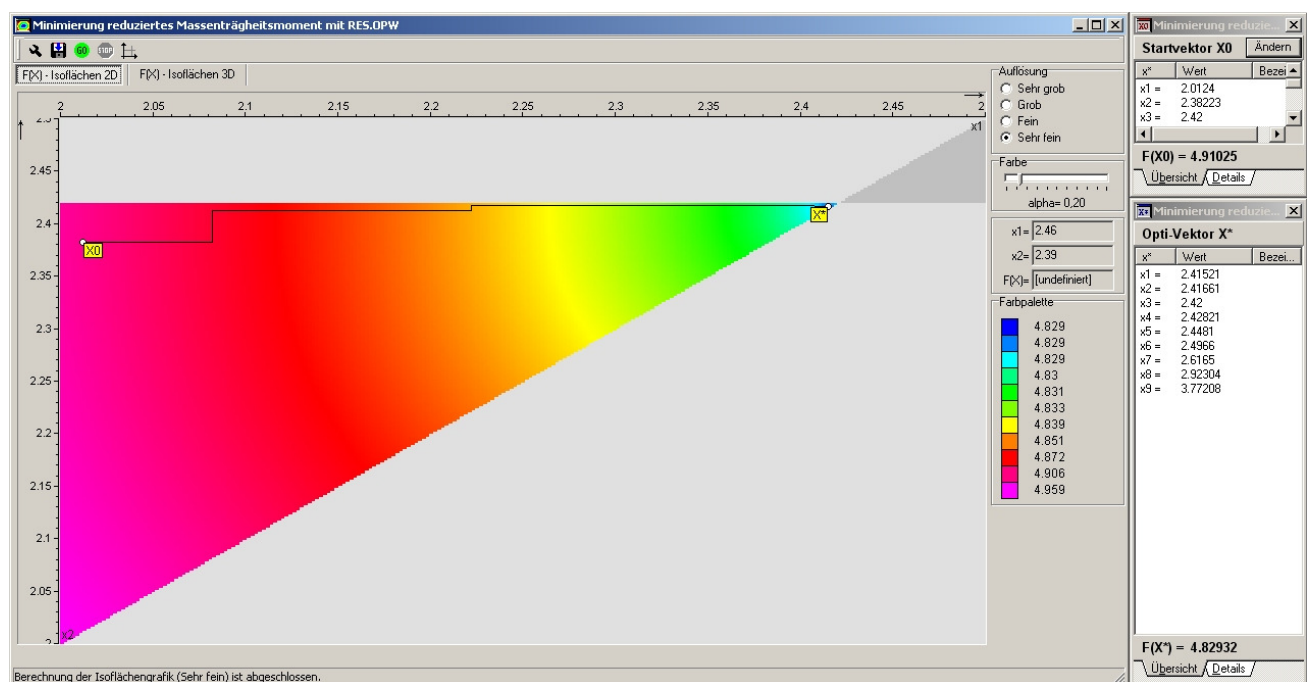
$x_1 = 2,41521$ $x_2 = 2,41661$ $x_3 = 2,42032$ $x_4 = 2,42821$ $x_5 = 2,44810$ $x_6 = 2,49659$
 $x_7 = 2,61648$ $x_8 = 2,92300$ $x_9 = 3,77195$

Der Funktionswert für das gelöste Gleichungssystem beträgt $F(X^*) = 7,22E-17!$

Die Lösung des Gleichungssystems wurde von einem zulässigen Startpunkt X_0 bis zum Optimalpunkt X^* mit dem gegen **Null** laufenden Funktionswert $F(X^*)$ erreicht. Als Strategien wurden MC und beim Optimierungsproblem GS erfolgreich eingesetzt.

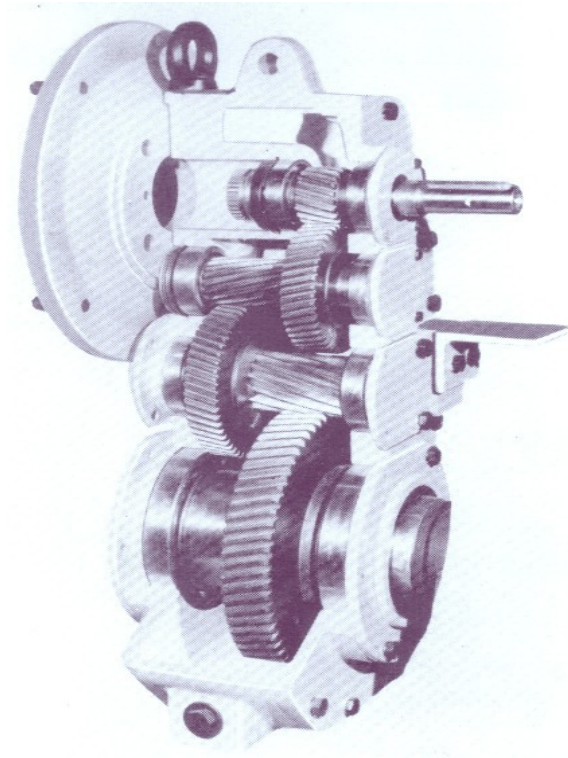


Die Aufgabestellung wurde auch als Optimierungsproblem mit Restriktionen behandelt und führte zu den gleichen Variablenwerten. Dabei erreichte das Massenträgheitsmoment ein Minimum von $F(X^*) = 4,83$.



Bei der Konstruktion des Getriebes sind Rundungen bezüglich der Werte für die Teilübersetzungen erforderlich, wodurch eine geringfügige Veränderung für das Minimum des Massenträgheitsmomentes zu erwarten ist.

Die folgende konstruktive Darstellung zeigt ein optimiertes Zahnradgetriebe für $k=3$, das sich in der Praxis erfolgreich bewährt hat.



An dieser praktischen Aufgabenstellung konnte eindrucksvoll gezeigt werden, dass eine Lösung mit **APPROX für Windows** sowohl über die restringierte Optimierung als auch über das nichtlineare Gleichungssystem möglich ist.

Prof.Dr.-Ing.habil. Heinz Strauchmann

<http://wwwm.htwk-leipzig.de/~hstrauch/approx/>