

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
 - **Hilfsmittel:** einfacher Taschenrechner (kein CAS, keine Grafik)
 - Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren **Name**.
 - Geben Sie **Lösungswege** an und begründen Sie Ihre Antworten!
 - **Rückseite** nicht vergessen!
-

1. Skizzieren Sie die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + y^2 \leq 9, (x - 9)^2 \leq 9 - y^2, y \geq 0\} !$$

(4 Punkte)

2. Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass die Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto \frac{\sqrt{4x - 3}}{\ln x}$$

für alle $x \in D$ einen sinnvollen Wert liefert. (4 Punkte)

3. Berechnen Sie für die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

die Matrix

$$(B A)^T.$$

(4 Punkte)

4. Beschreiben Sie in Stichpunkten wie man den Winkel zwischen zwei Vektoren $a = [x \ y \ z]^T \neq 0$ und $b = [u \ v \ w]^T \neq 0$ im Raum mittels Skalarprodukt berechnen kann! (3 Punkte)

5. Seien a und b zwei Vektoren im Raum, die einen Winkel von mindestens 10° und höchstens 80° einschließen. Der Vektor c sei die orthogonale Projektion von a auf b und der Vektor d sei die orthogonale Projektion von b auf c .

Welche zwei der vier beteiligten Vektoren sind mit Sicherheit identisch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz! (3 Punkte)

6. Geben Sie die Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis zur Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, die einen Punkt an der durch

$$-y - z = 0$$

beschriebenen Ebenen spiegelt. (3 Punkte)

7. Weisen Sie anhand der Definition des Begriffs Orthonormalbasis nach, dass es sich bei

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

um eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^2$ handelt! (3 Punkte)

8. Stellen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) := 5x^4 + 3x + 5 \sin x$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ auf!

Hinweis: Die Formel für das Taylor-Polynom n -ten Grades zur Entwicklungsstelle x_0 lautet

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k.$$

(4 Punkte)

9. Finden Sie eine Stammfunktion zu

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := 3x^2 + 2x + 3,$$

die durch den Punkt $(2, 0)$ verläuft! (4 Punkte)

10. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit Parametern $\mu = 1$ und $\sigma = 1$. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$P(X \leq 3 \text{ oder } X \geq 6)$$

an, für deren Auswertung nur die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung benötigt wird. (3 Punkte)

11. Wozu dienen die statistischen Verfahren der Punktschätzung und der Bereichsschätzung? Welche Aussagen liefern Sie jeweils über die betrachtete Grundgesamtheit? Stichpunktartige Antworten genügen. (6 Punkte)