

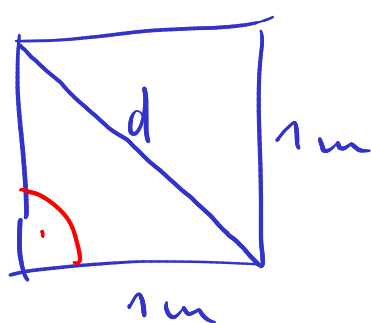
130

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

positive rationale Zahlen

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

Diagonale messen:



$$\begin{aligned} d &= 1,4 \text{ m} \quad \swarrow \frac{14}{10} \\ d &= 1,41 \text{ m} \\ d &= 1,414 \text{ m} \end{aligned}$$

Diagonale berechnen:

$$1^2 + 1^2 = d^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 2$$

$$\left(\frac{14}{10}\right)^2 = \frac{196}{100} < 2 < \left(\frac{15}{10}\right)^2 = \frac{225}{100}$$

$$\text{also } \frac{14}{10} < d < \frac{15}{10}$$

$$\left(\frac{141}{100}\right)^2 = \frac{19881}{10000} < 2 < \left(\frac{142}{100}\right)^2 = \frac{20164}{10000}$$

$$\text{also } \frac{141}{100} < d < \frac{142}{100}$$

können beliebig kleine Intervalle finden,
in denen d liegen muss, aber $d \notin \mathbb{Q}_+$

Können d durch unendliche Folge von geschachtelten Intervallen beschreiben, deren Länge gegen Null geht:

$$I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2), \dots$$

$$a_n \in \mathbb{Q}_+, b_n \in \mathbb{Q}_+$$

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

$$a_n^2 < 2 < b_n^2$$

Es gibt viele solche Folgen.

Die Gesamtheit all dieser Folgen nennen wir $\sqrt{2}$ („Wurzel aus 2“).

Beachte:

- Analog kann man Wurzeln für beliebige Zahlen in $\mathbb{Q}_+$ einführen (Diagonalen von Rechtecken).
- Erhalten so einen Teil dessen, was wir als reelle Zahlen bezeichnen (π, e sind nicht dabei).
- Reelle Zahlen haben keine Entsprechung in der Realität, sondern sind ein abstraktes Konzept,

welches gewisse theoretische
Betrachtungen vereinfacht

(Arbeit mit zahlenartigen Objekten,
statt Folgen von geschachtelten
Intervallen).

Bonus:

$$0,\bar{9} < 1 \quad \text{oder} \quad 0,\bar{9} = 1 \quad ?$$