

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 150 Minuten
 - **Hilfsmittel:** einfacher Taschenrechner (kein CAS, keine Grafik)
 - Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren **Name**.
 - Geben Sie **Lösungswege** an und begründen Sie Ihre Antworten!
 - **Rückseite** nicht vergessen!
-

1. Wir rechnen mit normalisierten dezimalen Gleitkommazahlen $m 10^e$, wobei m höchstens 3 Stellen hat und $e \geq 0$ gelten soll. Gerundet wird stets mathematisch. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke indem Sie vor und nach jeder Rechenoperation auf eine darstellbare Zahl runden.
 - (a) $(7800 + 64) + 64$ (2 Punkte)
 - (b) $7800 + (64 + 64)$ (2 Punkte)
 - (c) Vergleichen Sie die berechneten Werte mit dem exakten Ergebnis und begründen Sie eventuelle Abweichungen! (2 Punkte)
2. Die Funktion $f(x) = x^2 + 7x + 12$ soll für verschiedene Eingaben x ausgewertet werden.
 - (a) Bestimmen Sie die Konditionszahl in Abhängigkeit von x ! Für welche Eingaben ist die Kondition gut, für welche ist sie schlecht? (4 Punkte)

Hinweis: Die Konditionszahl einer Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$\kappa(x) := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \left| \frac{x_i}{f(x)} \right|$$

gegeben.

- (b) Die Funktion soll an der Stelle 2.001 ausgewertet werden. Der Einfachheit halber wird aber mit $x = 2$ gerechnet. Wie groß ist der relative Eingabefehler? Wie groß ist der zu erwartende Fehler im Funktionswert? (Auf das Zusammenfassen der entstehenden Ausdrücke zu Dezimalzahlen kann verzichtet werden.) (4 Punkte)
- (c) Die Funktion kann auch in der Form

$$f(x) = (x + 3)(x + 4)$$

geschrieben werden. Diese liefert einen alternativen Algorithmus zur Berechnung der Funktionswerte. Ändert sich dadurch die Kondition? Wenn ja: Wie? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

3. Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung manuell aus! Nutzen Sie $x_0 := 1$ als Startwert! Geben Sie die allgemeine Iterationsvorschrift sowie die beiden Iterierten an! Ist hier Konvergenz des Verfahrens zu erwarten (mit Begründung)? (6 Punkte)

4. Die Konditionzahl der Matrix A sei $\kappa_2(A) = 10$.

- (a) Wie groß darf der relative Fehler in b beim exakten Lösen von $Ax = b$ sein, damit der relative Lösungsfehler höchstens 1 Prozent beträgt? (3 Punkte)
- (b) Ist diese Fehlerschranke erfüllt, wenn statt der exakten rechten Seite $b = [6, 6, 3]^T$ die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = [5.998, 5.999, 2.998]^T$ verwendet wird? (3 Punkte)

5. Erläutern Sie die Begriffe Kondition (nicht Konditionszahl!) und Stabilität! In welchem Kontext spielen diese eine Rolle? Warum ist man an guter Kondition und hoher Stabilität interessiert? (4 Punkte)

6. Nennen Sie mindestens drei Gründe, warum ein ungünstig gewählter Startwert die Konvergenz des Newton-Verfahrens beim Lösen nichtlinearer Gleichungen verhindern kann! (3 Punkte)

7. Ein 2 Meter langes Kabel hängt zwischen zwei festen Punkten A und B in einer vertikalen Ebene. Die Punkte A und B sind im Koordinatensystem der Ebene in Meter gegeben. Die Form, die das Kabel dabei annimmt, kann näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden.

Geben Sie die allgemeine Form einer Parabel an und formulieren Sie drei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter der Parabel! Das Lösen der Gleichungen ist nicht erforderlich. (5 Punkte)

8. Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ der durch

$$f(x) = 8 e^{-7|x|} \cos(6x)$$

gegebenen Funktion f . Nutzen Sie dazu unter anderem die Beziehungen

$$h(x) = g(ax) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

$$h(x) = g(x) \cos(ax) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{h}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega - a) + \hat{g}(\omega + a)}{2},$$

$$h(x) = e^{-|x|} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

(5 Punkte)

9. Welche der Eigenschaften *linear, homogen, inhomogen, erster Ordnung, zweiter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten* treffen auf die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen jeweils zu?

(a) $3 \sin x + y'(x) = 7$,

(b) $y'(x) = 5y(x)'' + 3y(x)$,

(c) $\cos y(x) + y'(x) = 1$.

(6 Punkte)

10. Erläutern Sie in Stichpunkten das explizite Euler-Verfahren zum Lösen eines Anfangswertproblems erster Ordnung! Geben Sie insbesondere alle Formeln an, die zur Berechnung der numerischen Lösung benötigt werden! (4 Punkte)

11. Finden Sie die schwache Ableitung für die durch

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{für } x \leq 0, \\ x^3, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegebene Funktion f ! Weisen Sie anhand der Definition des Begriffs nach, dass es sich tatsächlich um eine schwache Ableitung handelt! (5 Punkte)