Druckgleichung nach Daniel Bernoulli (Bernoulligleichung)

1. Vorbetrachtung

In ruhenden und bewegten Flüssigkeiten gilt, wie in der Physik allgemein, das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Es ist nur auf die vorhandenen Formen der Energie anzuwenden. Gehen wir davon aus, dass keine chemischen Reaktionen in der Strömung stattfinden und auch anderweitig keine Energien zu- oder abgeführt werden, so verbleiben für die Betrachtung der veränderlichen Energieanteile

- der Druck als Form der „Inneren Energie“
- die Bewegungsgeschwindigkeit als Ausdruck der „kinetischen Energie“
- und die Höhe als Maß der „potentiellen Energie“.

Die bei jeder Bewegung auftretenden Reibungen vernachlässigen wir in erster Näherung, indem wir ein „ideales“, reibungsfreies Fluid betrachten. Es sei dadurch gekennzeichnet, dass keine Viskosität und keine Wandschubspannung existieren. Die sich ergebende Energiebilanz wird üblicherweise in der Strömungslehre als Druckgleichung formuliert.

2. Druckgleichung nach Daniel Bernoulli - Bernoulligleichung

Für die stationäre Strömung lässt sich unter Vernachlässigung der Reibung (ideale Strömung) ein Gleichgewicht der Summe der Drücke schreiben:

$$\rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + p_1 = \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + p_2 = const.$$

hierin bedeuten:

p – statischer Druck (allseitig in der Strömung vorhandener quer zur Strömungsrichtung messbarer Druck)

$\frac{\rho}{2} c^2$ - dynamischer Druck (kinetischer Anteil der Energie, messbar nur beim „Anstauen“ der Strömung, d.h. entgegen der Strömungsrichtung);
c - Strömungsgeschwindigkeit

$\rho \cdot g \cdot z$ - geodätischer Druckanteil (messbar nur als Differenz bei Veränderung der geodätischen Höhe der Strömung) z - Höhe

Die Bernoulligleichung lässt sich auch als Aussage zur Konstanz der spezifischen (massebezogenen) Energie ausdrücken:

$$g \cdot z_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = g \cdot z_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + \frac{p_2}{\rho} = const.$$

Beide Gleichungen liefern die gleiche Aussage!
Setzt man konstante geodätische Höhe voraus z=const., so erhält man einen direkten Zusammenhang zwischen Druck und Strömungsgeschwindigkeit.

$$\frac{\rho}{2}c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}c_2^2 + p_2$$

Die Strömungsgeschwindigkeit lässt sich auch aus dem Volumenstrom bestimmen:

$\dot{V} = c \cdot A$; $c = \frac{\dot{V}}{A}$

A – Durchströmfläche (senkrecht zu c)

$\dot{V}$ - Volumenstrom

Der statische Überdruck in der Strömung lässt sich auch als Höhe anzeigen. Dazu kann im einfachsten Fall eine Bohrung in der Wand des Rohres mit einem durchsichtigen Röhrchen zum Ablesen der Flüssigkeitshöhe verwendet werden (siehe Bild 1). Die angezeigte Flüssigkeitshöhe h ergibt sich aus dem statischen Druck der Flüssigkeit im Rohr nach der Beziehung

$p_{st,ü} = \rho \cdot g \cdot h$ oder als Differenz $\Delta p_{st,ü} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$

Aufgabe 1:

Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die Höhendifferenz Δh der Überdruckanzeige für zwei aufeinanderfolgende kreisrunde Durchströmquerschnitte bei horizontaler und idealer Strömung in Abhängigkeit vom Volumenstrom berechnet werden kann.

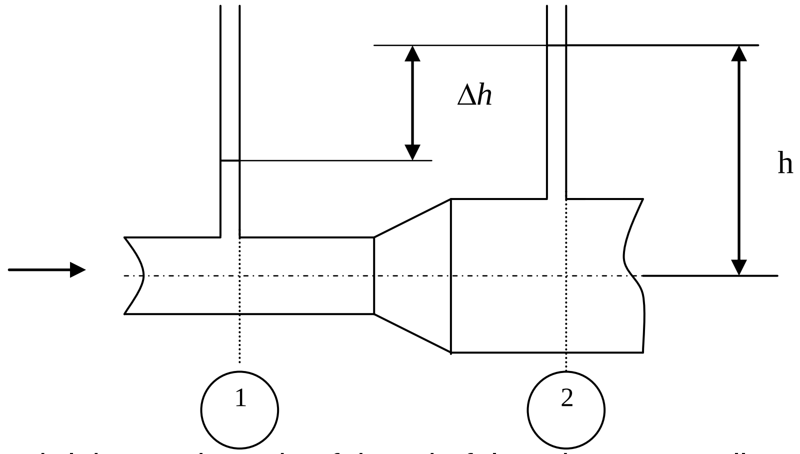

Bild 1: Rohrleitung mit zwei aufeinanderfolgenden Messstellen

Versuch:
Nutzen Sie den Messaufbau, um für einen Volumenstrom, der sinnvolle Höhenanzeigen der Flüssigkeit in den Anzeigeröhrchen zulässt (Anzeige nicht zu klein, Wasser darf nicht austreten), die Höhen der Anzeige an den einzelnen Durchströmquerschnitten zu ermitteln. Legen Sie als Nulllinie sinnvollerweise den niedrigsten Höhenwert oder die Blattunterkante fest. Nutzen Sie dazu ein Blatt Papier, welches Sie hinter das Anzeigeregister legen und markieren Sie darauf die Höhen.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie mit der abgeleiteten Gleichung die zu erwartenden Höhen in der Versuchsanlage. Gehen Sie von der ersten ermittelten Höhe aus.
Zeichnen Sie beide Höhenverläufe in ein Diagramm ein. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

3. Druckverluste

Bei der realen Strömung treten immer Reibungen und folglich Druckverluste als Ausdruck dieser Reibungen auf. Für Bauteile in Rohrleitungen ist es üblich Gesamtdruckverlustbeiwerte anzugeben. Diese drücken den zu erwartenden Druckverlust unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit aus. Sie ermöglichen folglich auch die Vorausberechnung der zu erwartenden Druckverluste in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit.
Der Gesamtdruckverlustbeiwert ζ ist definiert:

$$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\frac{\rho}{2} c^2}$$

Der Druckverlust im Bauteil Δp lässt sich aus dem Unterschied zwischen der berechneten Höhe (ideal ohne Verluste) und der wirklich gemessenen Höhe ermitteln. Für die gesamte Anlage ergibt sich der Druckverlust aus der Höhendifferenz (real -ideal) am letzten Bauteil.
Für die einzelnen Bauteile müssen die Höhendifferenzen

$$\Delta h_{theor.} = h_{berechnet\,Bauteil\,i-1} - h_{berechnet\,Bauteil\,i}$$

und

$$\Delta h_{real} = h_{gemessen\,Bautel\,i-1} - h_{gemessen\,Bauteil\,i}$$

errechnet werden. Der Druckverlust des Bauteils beträgt dann

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot (\Delta h_{theotetisch} - \Delta h_{gemessen})$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie den Gesamtdruckverlustbeiwert der gesamten Anlage.

Aufgabe 4
Beschreiben Sie kurz die Versuchsdurchführung und disskutieren Sie das Ergebnis!

Anmerkung:
Als Bauteil ist das Stück Rohrleitung zwischen zwei Messstellen aufzufassen.
Eine Darstellung des Messaufbaus mit der Angabe der Innendurchmesser an den einzelnen Messstellen zeigt Bild 2.

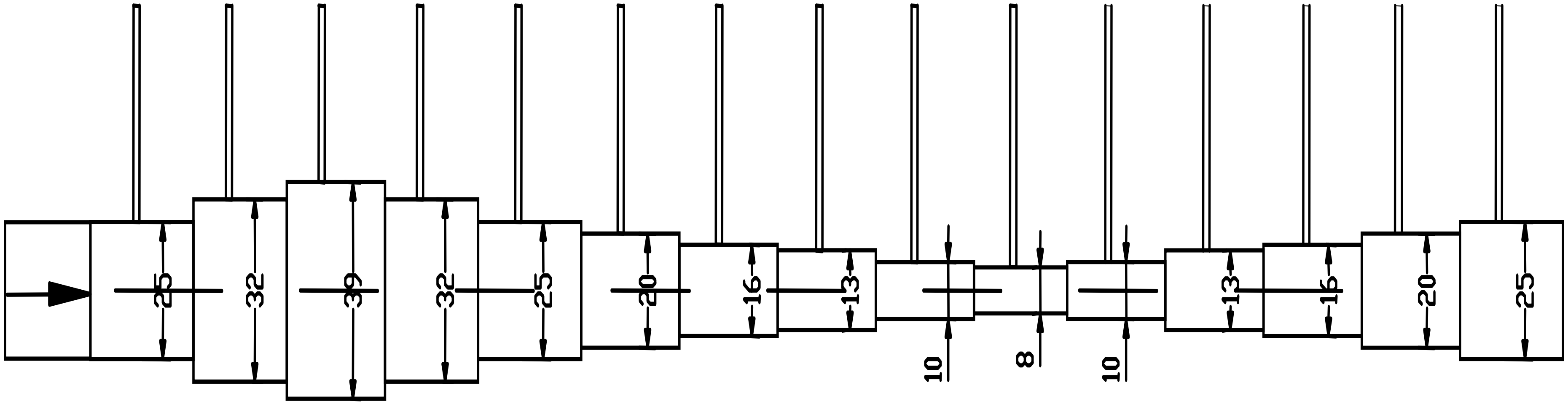

Bild 2: Aufbau der Messeinrichtung mit Angabe der Innendurchmesser in mm

Volumenstrom in l/h			alle Höhen und Höhendifferenzen in mm						Bemerkung
Messst. Nr.	d in mm	c in m/s	$h_{theoret.}$	$h_{gemessen}$	$h_{gem-mittel}$	$\Delta h_{theor.}$	$\Delta h_{gemessen}$	Δh_{theor}-$\Delta h_{gem.}$	
1	25								
2	32								
3	32								
4	39								
5	39								
6	32								
7	32								
8	25								
9	25								
10	20								
11	20								
12	16								
13	16								
14	13								
15	10								
16	13								
17	16								
18	16								
19	20								
20	20								
21	25								
								Gesamt ζ	