Formelsammlung

Kommunikationstechnik

12. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeines

1.1. SI-Vorsätze für Basiseinheiten

Tabelle 1.1.: SI-Vorsätze

Faktor	SI-Vorsatz	SI-Symbol	Faktor	SI-Vorsatz	SI-Symbol
10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	Yocto	y
10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	Zepto	z
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	Atto	a
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	Femto	f
10^{12}	Terra	T	10^{-12}	Piko	p
10^{9}	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{6}	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^{3}	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^{2}	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^{1}	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d

1.2. Bit und Byte

Das Wort Bit wird großgeschrieben, wenn sich um die Bezeichnung physikalischer Bits handelt. Zum Beispiel: Der Datenbus besitzt eine Breite von 16 Bit. Die Angabe von Informationsmengen und Datenraten wird kleingeschrieben, z. B. die Datenrate eines Übertragungssystems beträgt 10 kbit/s.

Je nach Anwendungsgebiet erfolgt die Angabe der Bitmenge in unterschiedlichen Potenzschreibweisen. Als Hinweis auf die verwendete Basis wird beim Vorsatz Kilo häufig ein großer Buchstabe für die binäre Basis (1 Kbit = 2^{10} bit) und ein kleiner Buchstabe für die dezimale Basis (1 kbit = 10^{3} bit) verwendet. Bei den anderen Vorsätzen (Mega, Giga, ...) gibt es diese Unterscheidung nicht, so dass es beim Weglassen der verwendeten Basis zu Verwechslungen führen kann.

Meist werden bei gespeicherten Datenmengen Zweierpotenzen verwendet, so dass 1 Mbit = 1.048.576 bit sind, während bei übertragenen Datenmengen pro Zeiteinheit in der Regel Zehnerpotenzen zugrundegelegt werden, so dass 1 Mbit/s = 1000.000 bit/s sind.

Um die Verwirrungen um die korrekte Basis zu beenden, hat das Institut der Elektrik- und Elektronikingenieure (IEEE) eine spezielle Notation für die 1024er Größenordnungen entwickelt, siehe Tabelle 1.2, die im Jahr 2000 auch von der Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC) mit ihrer Norm IEC 60027-2 übernommen wurde. Seither sollten die SI-Symbole nur noch für die dezimalen Größenordnungen verwendet werden. In der Praxis hat sich dieses System jedoch bisher kaum durchgesetzt.

1.2.1. Rate

Eine Rate ist eine Größe, die sich auf eine Zeiteinheit bezieht. Sie kann eine relative oder eine absolute Größe beschreiben. Die Rate wird häufig mit dem prozentualen Anteil Quote verwechselt, da der englische Begriff *rate* beides bezeichnet.

So müsste der Begriff Bit error rate (BER) eigentlich Bitfehlerquote übersetzt werden. Als Übersetzung hat sich jedoch die eigentlich falsche Übersetzung Bitfehlerrate durchgesetzt.

Tabelle 1.2.: Vorsätze für binäre Angaben

Kürzel	Name	Bedeutung	Wert
Ki	Kibi	binäres Kilo	$2^{10} = 1.024 \approx 1,02$ k
Mi	Mebi	binäres Mega	$2^{20} = 1.048.576 \approx 1,05$ M
Gi	Gibi	binäres Giga	$2^{30} \approx 1,07$ G
Ti	Tebi	binäres Tera	$2^{40} \approx 1,10$ T
Pi	Pebi	binäres Peta	$2^{50} \approx 1,13$ P
Ei	Exbi	binäres Exa	$2^{60} \approx 1,15$ E
Zi	Zebi	binäres Zetta	$2^{70} \approx 1,18$ Z
Yi	Yobi	binäres Yotta	$2^{80} \approx 1,21$ Y

1.3. Griechisches Alphabet

In Tabelle 1.3 ist das in der Technik häufig verwendete griechische Alphabet aufgelistet.

Tabelle 1.3.: Griechisches Alphabet

Name	Klein	Groß	Name	Klein	Groß
Alpha	α	A	Ny	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ϵ	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ, ϑ	Θ	Ypsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ, φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M	Omega	ω	Ω

2. Mathematik

2.1. Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1.1. Definitionen

- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A: $P(A)$
- Komplementäres Ereignis des Ereignisses A: $\bar{A}$
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A oder B: $P(A \cup B)$
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A und B: $P(A \cap B)$ bzw. $P(AB)$
- Sicheres Ereignis: I
- Unmögliches Ereignis: 0
- Unvereinbare Ereignisse: $A \cap B = 0$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Ereignis A unter der Bedingung, dass Ereignis B schon eingetreten ist: $P(A|B)$

2.1.2. Summenwahrscheinlichkeit

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{wenn beide Ereign. vereinbar} \tag{2.1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{wenn beide Ereign. unvereinbar} \tag{2.2}$$

2.1.3. Verbundwahrscheinlichkeit zweier Ereignisse A und B

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \text{wenn A und B abhängig} \tag{2.3}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A) \qquad \text{wenn A und B unabhäng.} \tag{2.4}$$

Somit sind Ereignisse A und B unabhängig, wenn gilt:

$$P(A|B) = P(A) \tag{2.5}$$

2.1.4. Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.6}$$

2.1.5. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

B tritt stets in Verbindung mit den i paarweise unvereinbaren Ereignissen A_i mit $i = 1, 2, \dots, n$ auf.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots \tag{2.7}$$

2.1.6. Bayessche Formel

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.8}$$

2.1.7. Parameter einer Verteilung

Zufallsgröße X

Größe deren verschiedene Werte bzw. Realisierungen x_i durch Zufallseinfluss entstehen und für die $P(X \in J)$ mit einem J Intervall auf der reellen Achse bzw. $P(X = a)$ bestimmbar ist.

Man unterscheidet in

- diskrete Zufallsgröße : endlich oder abzählbar unendlich viele Werte x_i
- stetige Zufallsgröße: beliebig viele Werte x_i

Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x) \tag{2.9}$$

$$= \sum_{x_i < x} p_i \qquad \text{für diskrete } X \tag{2.10}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für stetige } X \tag{2.11}$$

Verteilungsdichte

$$p_x(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) \tag{2.12}$$

Allgemeiner Erwartungswert

$$\mathrm{E}\{g(X)\} = m = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

Linearer Erwartungswert

$$\mathrm{E}\{X\} = m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.14}$$

Quadratischer Erwartungswert

$$\mathrm{E}\left\{X^2\right\} = m = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.15}$$

Varianz (Streuung)

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left\{(X - m)^2\right\} = \mathrm{E}\left\{X^2\right\} - \mathrm{E}\{X\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

Als Standardabweichung wird σ bezeichnet.

2.1.8. Binomialverteilung

Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeit für genau x auftretende Ereignisse bei n Versuchen und der Wahrscheinlichkeit eines zugrundeliegenden Ereignisses von p).

$$P(x|n) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \tag{2.17}$$

Mittelwert von x (Erwartungswert) $E[x] = np$.
Varianz: $\sigma_i^2 = np(1-p)$

2.1.9. Poisson-Verteilung

Die Poissonverteilung ist der Grenzwert der Binomialverteilung für $n \to \infty$ und $p \to 0$ (Wahrscheinlichkeit für genau x auftretende Ereignisse bei einem Mittelwert der auftretenden Ereignisse von λ):

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \mathrm{e}^{-\lambda} \tag{2.18}$$

2.1.10. Abstandsverteilung

Vorgabe der Anzahl der Erfolge

$$P(n|x) = \binom{n-1}{x-1} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \tag{2.19}$$

Mittelwert von x (Erwartungswert) $E[n] = x/p$.
Varianz: $\sigma_n^2 = x\frac{1-p}{p^2}$

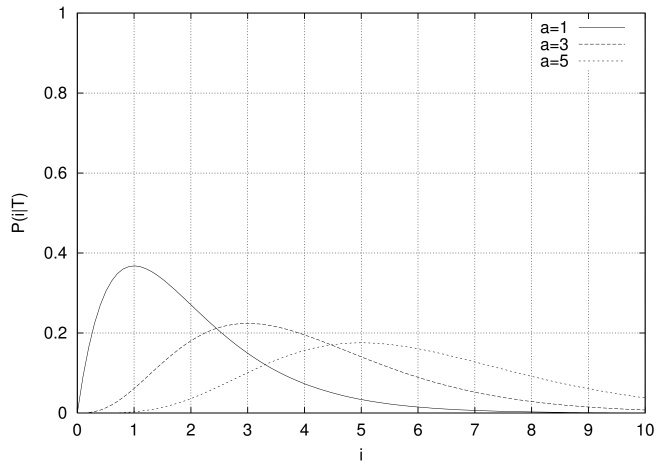


Abbildung 2.1.: Poisson-Verteilung mit $T = 1$

2.1.11. Erlang-i-Verteilung

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Zeit τ benötigt, um i Erfolge zu erhalten.

$$\text{Verteilungsdichte: } p(\tau|i) = \lambda \frac{(\lambda\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \tag{2.20}$$

$$\text{Erwartungswert: } \mathrm{E}\{\tau\} = i/\lambda \tag{2.21}$$

$$\text{Varianz: } \sigma_\tau^2 = \frac{i}{\lambda^2} \tag{2.22}$$

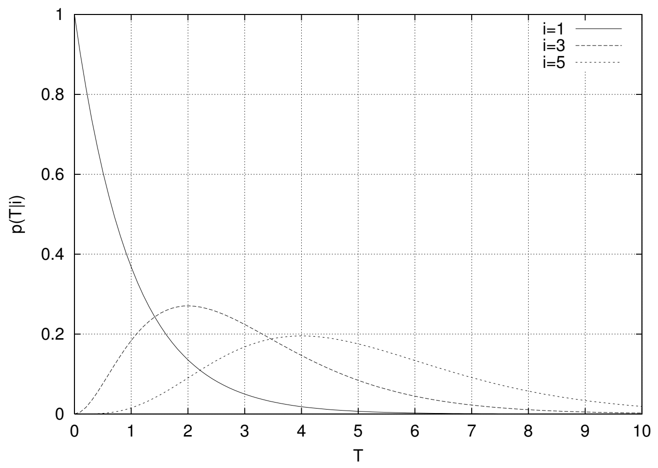


Abbildung 2.2.: Erlang-i-Verteilung mit $\lambda = 1$

2.1.12. Exponentialverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte, zum Zeitpunkt τ nach Beobachtungsbeginn den ersten Erfolg zu erhalten (Erlang-1-Verteilung).

$$\text{Verteilungsdichte: } p(\tau) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \tag{2.23}$$

$$\text{Erwartungswert: } \mathrm{E}\{\tau\} = 1/\lambda \tag{2.24}$$

$$\text{Varianz: } \sigma_\tau^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.25}$$

2.1.13. Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit dem Mittelwert m und der Varianz σ^2 ist

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.26}$$

siehe auch Bild 2.3.

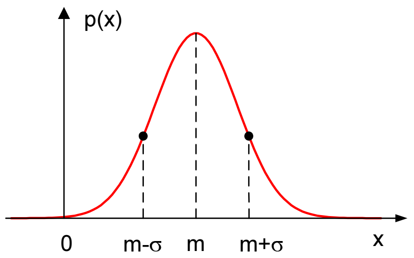


Abbildung 2.3.: Dichtefunktion der Normalverteilung mit Mittelwert m und Varianz σ^2

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallswert x einen bestimmten Wert C überschreitet ergibt sich aus:

$$P(x > C) = \int_C^\infty p(\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{2.27}$$

Fehlerfunktionen

Die normierte Zufallsgröße $x' = (x - m)/\sigma$ ist ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1, siehe Bild 2.5.

Es gilt der Zusammenhang:

$$P(x > C) = P\left(\frac{x-m}{\sigma} > \frac{C-m}{\sigma}\right) = P(x' > \alpha) \tag{2.28}$$

Es gilt weiterhin mit $\alpha \mathrel{\widehat{=}} (C-m)/\sigma$:

$$P\left(\frac{x-m}{\sigma} > \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \, \mathrm{d}\eta \mathrel{\widehat{=}} Q(\alpha) \tag{2.29}$$

mit $Q(\alpha)$ der komplementären Gaußschen Fehlerfunktion.

$$P\left(\frac{x-m}{\sigma} < \alpha\right) = Q(-\alpha) = 1 - Q(\alpha) \tag{2.30}$$

Es gilt die Näherung:

$$Q(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\alpha^2/2} \tag{2.31}$$

Für die manchmal verwendete Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(x)$ und die komplementäre Fehlerfunktion $\mathrm{erfc}(x)$ gilt:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} \, \mathrm{d}\eta \tag{2.32}$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\eta^2} \, \mathrm{d}\eta = 2Q(x\sqrt{2}) \tag{2.33}$$

bzw.

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} \, \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.34}$$

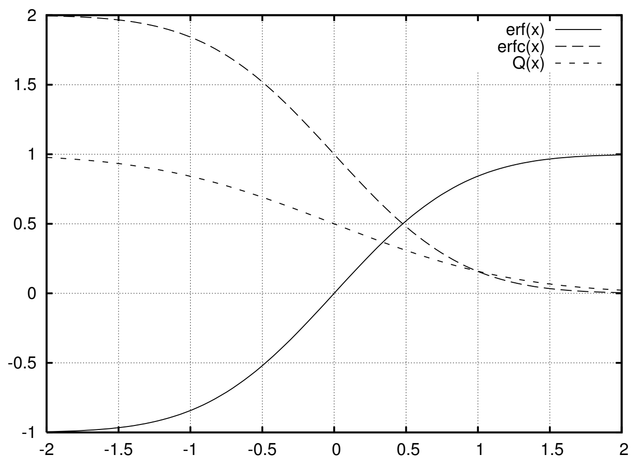


Abbildung 2.4.: Fehlerfunktionen

2.2. Geometrie

- Kreisumfang: $2\pi r$
- Kreisfläche: πr^2
- Kugeloberfläche: $4\pi r^2$

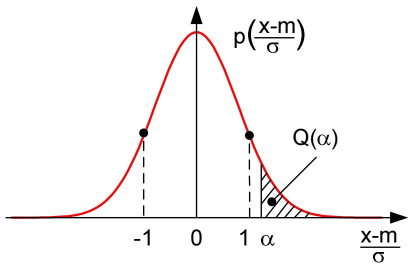


Abbildung 2.5.: Normierte Normalverteilung und Q-Funktion

Tabelle 2.1.: Fehlerfunktionen

x	$\mathrm{erfc}(x)$	$Q(x)$
0	1	0
1,0	0,157	0,158
1,5	$3,39 \cdot 10^{-2}$	$6,68 \cdot 10^{-2}$
2,0	$4,68 \cdot 10^{-3}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$
2,5	$4,07 \cdot 10^{-4}$	$6,20 \cdot 10^{-3}$
3,0	$2,21 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$
3,5	$7,40 \cdot 10^{-7}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$
4,0	$1,58 \cdot 10^{-8}$	$3,17 \cdot 10^{-5}$

2.3. Logarithmengesetze

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \tag{2.35}$$
$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \tag{2.36}$$
$$\log a^n = n \cdot \log a \tag{2.37}$$
$$\log_b z = \log_a b / \log_a z \tag{2.38}$$

2.4. Winkelfunktionen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{2.39}$$
$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sqrt{2} \sin(\pi/4 + \alpha) \tag{2.40}$$
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tag{2.41}$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tag{2.42}$$
$$\sin^2 \alpha = 1/2(1 - \cos 2\alpha) \tag{2.43}$$
$$\cos^2 \alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha) \tag{2.44}$$
$$\cos^3 \alpha = 1/4(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) \tag{2.45}$$
$$\cos^4 \alpha = 1/8(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3) \tag{2.46}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\, \mathrm{d}t = \pi \tag{2.47}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{2.48}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{2.49}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2.50}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\cos(\alpha-\beta) + 1/2\cos(\alpha+\beta) \tag{2.51}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\cos(\alpha-\beta) - 1/2\cos(\alpha+\beta) \tag{2.52}$$
$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\sin(\alpha-\beta) - 1/2\sin(\alpha+\beta) \tag{2.53}$$

Besonders für Verfahren der algebraischen Kanalcodierung hat die Moivresche Formel große Bedeutung

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \tag{2.54}$$

Unter $\sqrt[n]{z}$ versteht man eine komplexe Zahl w, deren n-te Potenz gleich z ist, d. h. eine Lösung der Gleichung $w^n = z$.

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n)\right] \tag{2.55}$$

Für $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ entstehen n verschiedene Werte für w. Das bedeutet, die komplexe Ebene wird in n Teile des Kreises geteilt.

2.5. Reihen

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0} a_1 q^k = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1 \tag{2.56}$$

2.6. Algebra

2.6.1. Matrizen

Rechteckige Matrix:

$$\mathrm{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Transponierte Matrix:

$$\mathrm{A}^T_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$(\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A} \tag{2.59}$$
$$(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T \tag{2.60}$$

Spaltenvektor:

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

Zeilenvektor:

$$\mathrm{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Quadratische Matrix: $(m = n)$
Symmetrische Matrix: $\mathrm{A}^T = A$
Einheitsmatrix:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Multiplikation von Matrizen:

$$\mathrm{A}_{(m,n)} \cdot \mathrm{B}_{(n,p)} = \mathrm{C}_{(m,p)} \tag{2.64}$$

Das kommutative Gesetz gilt im Allgemeinen nicht: $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

$$(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC}) = \mathrm{ABC} \tag{2.65}$$

Lineare Abhängigkeit:
Zwei Vektoren a, b für die gilt: $\mathrm{a} = \lambda \mathrm{b}$ sind linear abhängig.
Determinante einer Matrix:
Reguläre Matrix: $|A| \neq 0$ Singuläre Matrix: $|A| = 0$ Inverse Matrix

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E} \tag{2.66}$$
$$(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A} \tag{2.67}$$

Rang einer Matrix $\mathrm{A}_{(m,n)}$: $r(\mathrm{A})$:
Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten: $r(\mathrm{A}_{(m,n)}) \leq \min(m, n)$
Eigenvektoren und Eigenwerte:
Gesucht sind die Vektoren x (Eigenvektoren) und die reellen Zahlen λ (Eigenwerte), die die folgende Gleichung lösen:

$$\mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x} \tag{2.68}$$

Beispiel 1. *noch einfügen*

2.6.2. Vektoren

Betrag

$$|\mathrm{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2.69}$$

Skalares Produkt (inneres Produkt)

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = |\mathrm{a}||\mathrm{b}| \cos(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots \tag{2.70}$$

Vektorielles Produkt (äußeres Produkt)

Das Vektorprodukt zweier Vektoren A und B ist ein Vektor, der der von A und B aufgespannten Fläche senkrecht steht und einen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von A und B gebildeten Parallelogramms besitzt. Das Vektorprodukt zeigt in die Richtung, in die sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man den ersten Vektor auf dem kürzesten Weg in Richtung des zweiten Vektors bewegt.

$$\mathrm{v} = \mathrm{a} \times \mathrm{b} \text{ mit } \mathrm{v} \perp \mathrm{b} \text{ und } \mathrm{v} \perp \mathrm{b} \quad \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{v} \text{ bilden Rechtssystem} \tag{2.71}$$

$$|\mathrm{a} \times \mathrm{b}| = |\mathrm{a}||\mathrm{b}| \sin(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \tag{2.72}$$

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = -(\mathrm{b} \times \mathrm{a}) \quad \text{Kommutatives Gesetz gilt nicht} \tag{2.73}$$

Spatprodukt

Das Ergebnis des Spatprodukts ist ein Skalar, dessen Betrag den Rauminhalt V desjenigen Prismas angibt, das von den drei Vektoren A, B und C aufgespannt wird.

$$V = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) \tag{2.74}$$

2.6.3. Vektorraum

Menge von Elementen, in der eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definiert sind, dass für Elemente und skalare Größen folgende Gesetze gelten:

- Assoziativgesetz
- Kommutativgesetz
- Distributivgesetz
- Existenz des Nullelements
- Existenz des Inverses Elements

Basis eines Vektorraums V^n: ein in einer festen Reihenfolge angeordnetes linear unabhängiges System von Basisvektoren aus V^n mit der Eigenschaft, dass sich jeder beliebige Vektor aus V^n auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt.

3. Vermittlung

3.1. Bellman-Ford-Gleichung

- sei $d_x(y)$ der beste Pfad von x nach y
- Dann gilt:

$$d_x(y) = \min_v \{c(x,v) + d_v(y)\} \tag{3.1}$$

- Das Minimum wird über alle Nachbarn v von x gebildet.

3.1.1. Dijkstra-Algorithmus

N Menge aller Knoten

$c(x,y)$ Kosten des Links (∞ wenn keine Verbindung)

$D(v)$ Kosten des besten derzeit bekannten Pfades zu v

$p(v)$ Vorgängerknoten zu v

N' Menge der Konten mit feststehendem bestem Pfad

```
Initialization:
N' = {u}
for all Nodes v from N
  if v adjacent to u
    then D(v) = c(u,v)
  else  D(v) = ∞
Loop
  find w not in N' such that D(w) is a minimum
  add w to N'
  update D(v) for all v adj. to w and not in N':
    D(v) = min( D(v), D(w) + c(w,v) )
until all nodes in N'
```

4. Kanalzugriffsprotokolle

4.1. Kanalzugriff

4.1.1. Grundlagen

Übertragungsverzögerung (Serialisierungsverzögerung) Funktion der Paketlänge L und der Übertragungsrate r_b der Verbindungsleitung

$$T_p = L/r_b \tag{4.1}$$

Ausbreitungsverzögerung (Propagation Delay) Funktion der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals v_s und der Entfernung s

$$T_a = s/v_s \tag{4.2}$$

Verarbeitungsverzögerung T_v – Zeit für die Verarbeitung eines Paketes in einem Netzknoten

Warteschlangenverzögerung T_w – zufällige Zeit bis zum Absenden eines Paketes in einem Netzknoten (von Netzlast abhängig)

4.1.2. ALOHA-Protokoll

Dauer einer Paketübertragung: T_p

Maximal mögliche Paketrate: $\mu = 1/T_p$ [Pakete/s]

Verkehrsrate: λ [Pakete/s] (mittlerer erzeugter Datenverkehr)

Verkehrsangebot: $\Lambda = \lambda T_p$ [Pakete/Paketdauer]

Kanalzugriffsrate: g [Pakete/s] (mittlere Rate an Kanalzugr.)

Kanalzugriff: $G = gT_p$ [Pakete/Paketdauer]

Erfolgreiche Kanalzugriffsrate: d [Pakete/s]

Normierter Datendurchsatz: $D = dT_p$ [Pakete/Paketdauer]

Wiederholungen: $W = G - \Lambda$ [Pakete/Paketdauer]

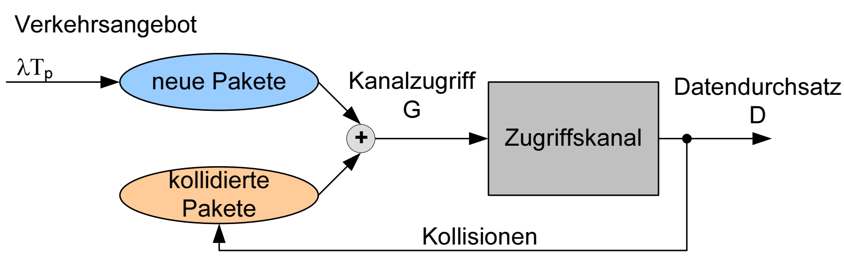


Abbildung 4.1.: Modell des ALOHA-Protokolls

Datendurchsatz D beim ungetakteten Verfahren (unslotted ALOHA) und der Kanallast G

$$D = G \cdot \mathrm{e}^{-2G} \tag{4.3}$$

Datendurchsatz D beim getakteten Verfahren (slotted ALOHA) und der Kanallast G

$$D = G \cdot \mathrm{e}^{-G} \tag{4.4}$$

4.1.3. CSMA

Durchsatz abhängig von Netzparameter $\alpha = T_a / T_p$

$$D = \frac{\mathrm{e}^{\alpha G}}{1/G + 1 + \alpha} \tag{4.5}$$

4.1.4. CSMA/CD

5. Sicherungsprotokolle

5.1. Fehlerwahrscheinlichkeiten

Als Fehlererkennungscodes werden in der Regel CRC-Codes eingesetzt.

- Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines oder mehrerer Fehler im Block (Blockfehler): P_e
- Wahrscheinlichkeit für das Versagen eines fehlererkennenden Codes bei einem auftretenden Fehler: P_v
- Wahrscheinlichkeit für erkannten Fehler: $P_{de} = P_e \cdot (1 - P_v) \approx P_e$
- Wahrscheinlichkeit für nicht erkannten Fehler (Restfehlerwahrscheinlichkeit): $P_{ue} = P_e \cdot P_v$
- Wahrscheinlichkeit für das Versagen des ARQ-Protokolls:

$$P_{e-ARQ} = P_{ue} + P_{de} \cdot P_{ue} + P_{de}^2 \cdot P_{ue} + \cdots = P_{ue} \sum_{i=0}^{\infty} P_{de}^i = P_{ue} \cdot \frac{1}{P_{ue}} \tag{5.1}$$

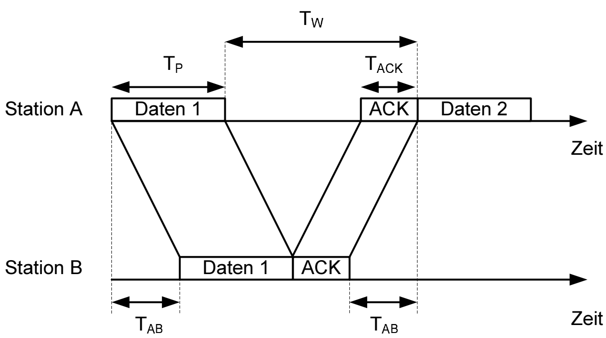


Abbildung 5.1.: Zeitliche Darstellung des ARQ-Verfahrens

-0.5cm Der Durchsatz eines ARQ-Systems ist die Anzahl von Infobits, die in einer gewissen Zeit übertragen und akzeptiert wurden, bezogen auf die Anzahl Bits, die hätten übertragen werden können

Mittlere Anzahl Wiederholungen:

$$A = \sum_{v=1}^{\infty} v \cdot P_v = 1 \cdot P_{ok} + 2 \cdot P_{de} P_{ok} + 3 \cdot P_{de} P_{de} P_{ok} + \cdots = \tag{5.2}$$

5.2. Effizienz verschiedener ARQ-Protokolle

Effizienz der ARQ-Protokolle bei Fehlern auf dem Kanal (idealer Rückkanal) und einer Codierung mit Redundanz R_c.

5.2.1. Perfektes ARQ-Protokoll

$$\eta_{max} = (1 - P_{de}) R_c \tag{5.3}$$

5.2.2. Stop-and-Wait-Protokoll (SW)

Die Effizienz bei idealem Rückkanal ist:

$$\eta_{SW} = \frac{T_p}{T_p + T_w}(1 - P_{\mathrm{de}})R \tag{5.4}$$

5.2.3. Go-back-N -Protokoll (GBN)

Bei Wahl einer optimalen Fenstergröße N und fehlerfreiem Rückkanal gilt für die Effizienz:

$$\eta_{GBN} = \frac{1 - P_{\mathrm{de}}}{1 + (N-1)P_{\mathrm{de}}}R \tag{5.5}$$

$$N = \lceil T_W / T_p + 1 \rceil \tag{5.6}$$

Bei $P_{\mathrm{de}} \to 0$ strebt die Effizienz gegen die Coderate des CRC-Codes.

5.2.4. Selective Repeat - Protokoll (SR)

$$\eta_{SR} = (1 - P_{\mathrm{de}})R \tag{5.7}$$

5.3. TCP

5.3.1. Retransmission Timer nach RFC 6398

- SRTT (smoothed round-trip time)
- RTTVAR (round-trip time variation)
- Clockauflösung G
- Minimum RTO SHOULD be 1 s

1. Start mit RTO = 1 s
2. nach Messung der ersten RTT mit Wert R:

$$\mathrm{SRTT} = R \tag{5.8}$$
$$\mathrm{RTTVAR} = R/2 \tag{5.9}$$
$$\mathrm{RTO} = \mathrm{SRTT} + \max(G, 4 \cdot \mathrm{RTTVAR}) \tag{5.10}$$

3. nach weiteren RTT-Messungen ($\alpha = 1/8$, $\beta = 1/4$):

$$\mathrm{RTTVAR} = (1 - \beta) \cdot \mathrm{RTTVAR} + \beta \cdot |\mathrm{SRTT} - R| \tag{5.11}$$
$$\mathrm{SRTT} = (1 - \alpha) \cdot \mathrm{SRTT} + \alpha R \tag{5.12}$$
$$\mathrm{RTO} = \mathrm{SRTT} + \max(G, 4 \cdot \mathrm{RTTVAR}) \tag{5.13}$$

6. Kanalcodierung

6.1. Grundlagen

Man unterscheidet bei der Kanalcodierung zwischen zwei grundsätzlichen Prinipien FEC und ARQ.

FEC-Verfahren (Forward Error Correction)

- Einsatz leistungsfähiger Codes zur Fehlerkorrektur beim Empfänger
- Feste Coderate und damit feste Übertragungsrate unabhängig von Qualität des Übertragungskanals
- Kein Rückkanal notwendig
- Qualität der Übertragung ist vom Kanal abhängig
- Bei guten Übertragungsbedingungen wird zuviel Redundanz hinzugefügt
- Bei sehr schlechten Bedingungen reicht die Korrekturfähigkeit unter Umständen nicht aus und führt dann zu Restfehlern

ARQ-Verfahren (Automatic Repeat Request)

- Einsatz von Codes zur Fehlererkennung beim Empfänger
- Verwendung von Protokollen, die im Fehlerfall eine erneute Übertragung veranlassen
- Rückkanal erforderlich
- Adaptives Verfahren – es wird nur bei Fehlern wiederholt
- Datenrate hängt von der Qualität des Kanals ab
- Qualität der Übertragung weitgehend planbar

Häufig wird eine Kombination beider Verfahren genutzt, siehe auch Bild 6.1.

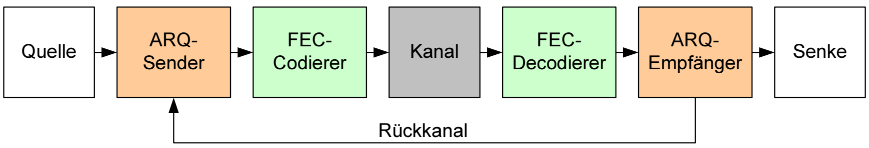


Abbildung 6.1.: Kombination des ARQ- und FEC-Verfahrens

6.1.1. Fehlererkennung und -korrektur

Maximale Anzahl der sicher erkennbaren Fehler t_E

$$d_{min} \geq t_E + 1 \quad \rightarrow t_E = \lfloor d_{min} - 1 \rfloor . \tag{6.1}$$

Maximale Anzahl der korrigierbaren Ausfallstellen (Erasures) t_A

$$d_{min} \geq t_A + 1 \quad \rightarrow t_A = \lfloor d_{min} - 1 \rfloor . \tag{6.2}$$

Maximale Anzahl der sicher korrigierbaren Fehlern pro Codewort t_K

$$d_{\min} \geq 2t_K + 1 \quad \rightarrow t_K = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor . \tag{6.3}$$

Kombinierte Fehlererkennung und -korrektur

$$d_{\min} \geq t_K + t_E + 1 \tag{6.4}$$

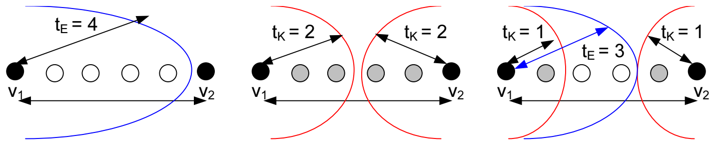


Abbildung 6.2.: Korrekturkugeln für Fehlererkennung, -korrektur und Kombination beider bei $d_{\min} = 5$

6.1.2. Notation von Blockcodes

$(n, k, d_{\min})_q$-Code

n - Codeblocklänge, k-Informationsblocklänge, $d_{\min}$-Minimaldistanz, q - Codealphabet ($q = 2 \rightarrow$ Binärcode)

6.1.3. Restfehlerwahrscheinlichkeit

Wortfehlerwahrscheinlichkeit eines binären Codes der Länge n mit t korrigierbaren Fehlern und einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit auf dem Kanal von P_e bei Hard-Decision Decodierung:

$$P_w \leq \sum_{d=t+1}^{n} \binom{n}{d} P_e^d \cdot (1 - P_e)^{n-d} = 1 - \sum_{d=0}^{t} \binom{n}{d} P_e^d \cdot (1 - P_e)^{n-d} \tag{6.5}$$

6.1.4. Systematische Codierung

Das Informationswort ist ein Bestandteil des Codeworts.

6.2. Lineare Codes

Ein Code C heißt linearer Code, wenn die Summe zweier beliebiger Codeworte wieder ein Codewort ergibt:

$$\alpha a + \beta b \rightarrow C \qquad \text{mit } a, b \in C \text{ und } \alpha, \beta \in GF(p) \tag{6.6}$$

Die Minimaldistanz eines linearen Codes kann aus dem Minimalgewicht bestimmt werden:

$$d_{\min}(C) = \min w_H(C) \qquad \text{mit C dem Code ohne Nullwort} \tag{6.7}$$

6.2.1. Singleton-Schranke

Für einen (linearen) $(n, k, d_{\min})_q$ - Code muss gelten:

$$d_{\min} \leq n - k + 1 \tag{6.8}$$

- Bei Gleichheit in der Schranke handelt es sich um einen sogenannten Maximum-Distanz-Code (engl. *maximum distance separable*) kurz MDS-Code
- Alle Codewörter unterscheiden sich dann an mindestens $n - k + 1$ Stellen

6.2.2. Generatormatrix

Die Codierung eines linearen Codes kann mittels Generatormatrix G erfolgen:

$$x = uG \tag{6.9}$$

mit u dem Informationswort und x dem Codewort.

Aufbau von G für systematische Codierung:

$$G_{k\times n} = (E_k \,|\, P_{k\times n-k}) \tag{6.10}$$

E = Einheitsmatrix, P = Paritätsmatrix

6.2.3. Dualer Code und Prüfmatrix

Zu einem Code C existiert ein dualer Unterraum (Code) C_d so, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren aus C und C_d stets Null ergibt – alle Vektoren aus C und C_d sind orthogonal ($ab^T = 0$ für alle a, b aus C, C_d).

Eine Matrix H heißt Prüfmatrix für den Code C, wenn deren Zeilen eine Basis für den dualen Code C_d bilden, also $C_d = uH$.

Die Prüfmatrix kann aus der Generatormatrix gebildet werden und umgekehrt:

$$H_{n-k\times n} = (-P^T_{k\times n-k} \,|\, E_{n-k}) \tag{6.11}$$

6.2.4. Kanalmodell

Fehlervektor: e gesendetes Codewort: x Empfangswort: $y = x + e$

6.2.5. Nebenklassenzerlegung

Der Code C ist ein Untervektorraum des Vektoraums V. Eine Nebenklasse ist die Menge $M_i = e_i + C$ mit $e_i \in V$. Es existieren q^{n-k} verschiedene Nebenklassen.

Beispiel einer Nebenklassenzerlegung eines $(5, 2)_2$-Codes → 4 Codeworte

$C = \{00000 \quad 01101 \quad 10110 \quad 11011\}$

M_0 entspricht dem Code C, 2^{5-2} verschiedene Nebenklassen

i	e_i	Nebenklassen M_i			
0	00000	00000	01101	10110	11011
1	00001	00001	01100	10111	11010
2	00010	00010	01111	10100	11001
3	00100	00100	01001	10010	11111
4	01000	01000	00101	11110	10011
5	10000	10000	11101	00110	01011
6	11000	11000	10101	01110	00011
7	10001	10001	11100	00111	01010

Fehlerkorrektur mittels Nebenklassenzerlegung:

- Durchführung der Nebenklassenzerlegung und Wahl des Nebenklassenanführers (coset leaders) als Wort mit dem geringstem Gewicht
- Suche des Empfangswortes in allen Nebenklassen
- Wahl des Nebenklassenanführers als das am wahrscheinlichsten Fehlermuster

6.2.6. Syndromdecodierung

- Syndrom ist nur vom Fehlervektor aber nicht vom Codewort abhängig, da

$$s = y \cdot H^T = (x + e)H^T = xH^T + eH^T = eH^T \tag{6.12}$$

- Die Anzahl der Syndrome entspricht der Anzahl der Nebenklassen (binärer Code: 2^{n-k}).
- Damit ist die Zuordnung von Syndromwerten zu Fehlerwerten für die Fehlerkorrektur möglich.
  1. Berechnung der Syndrome für die zu korrigierenden Fehlermuster
  2. Anlegen einer Tabelle Sydrom ↔ Fehlermuster
- Empfänger berechnet Syndrom und korrigiert anhand des Tabellenwertes

6.2.7. Hamming-Codes

- Korrektur von 1-Bitfehlern, wählbare Codewortlänge
- Codevorschrift $(2^r - 1, 2^r - r - 1, 3)_2$ mit $r \geq 3$

6.3. Zyklische Codes

- Jede zyklische Verschiebung eines Codewortes ist wieder ein Codewort Beispiel: C = 000, 011, 101, 110
- Zusammenhang zwischen Vektor- und Polynomdarstellung:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}) & \in \mathbb{F}_q^n \\ \updownarrow & \\ a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} & \in \mathbb{F}_q^n[x] \end{array}$$

- Mathematische Darstellung der zyklischen Codes als Polynom Beispiel: $a = (010100) \leftrightarrow x + x^3$
- Polynom-Addition und Polynom-Multiplikation in GF(q)

6.3.1. Generatorpolynom

- Basis eines zyklischen Codes ist das Generatorpolynom $g(x)$
- Alle Codeworte sind Vielfache des Generatorpolynoms → Statt einer Generatormatrix mit k Zeilen genügt ein Basiscodewort (Generatorpolynom $g(x)$)
- Für zyklischen Code muss $g(x)$ ein Teiler von x^{n-1} sein
- Mit $g(x)$ vom Grad $n - k$ und $u(x)$ einem Infopolynom wird ein zyklischer (n, k)-Code erzeugt mit:

$$C = u(x)g(x) \tag{6.13}$$

6.3.2. Algorithmus für die systematische Codierung

Eingabe:

- Nachricht der Länge k, dargestellt als Polynom $u(x)$
- Generatorpolynom $g(x)$ vom Grad m (z. B. für CRC-m)

Ausgabe:

- Codewort der Länge $n = k + m$, dargestellt als Polynom $c(x)$

Verfahren:

1. m Nullen an die Nachricht anhängen für CRC-Bits: $\acute{u}(x) = u(x)x^m$
2. Berechn. Divisionsrest bei Division mit Generatorpolynom: $\acute{u}(x) = q(x)g(x) + r(x)$ mit $\operatorname{Grad} r(x) < \operatorname{Grad} g(x)$
3. Addition des Divisionsrestes zu $\acute{u}(x)$ ergibt Codewort: $c(x) = \acute{u}(x) + r(x) = q(x)g(x) + r(x) + r(x) = q(x)g(x)$

6.3.3. Fehlererkennung mittels CRC-Codes

Es gelten für einen CRC-Code mit m Prüfbits und maximal $2^{m-1} - m - 1$ Informationsbits:

- Minimaldistanz $d_{\min} = 4$ (Alle möglichen Codewörter unterscheiden sich in mindestens 4 Stellen)
- Alle Fehlermuster mit einer maximaler Anzahl von 3 Fehlerstellen (Gewicht 3) werden sicher erkannt
- Alle Fehlermuster mit ungerader Fehleranzahl werden erkannt
- Alle Bündelfehler bis einschließlich Länge $l = m$ werden erkannt
- Bündelfehler der Länge $l = m + 1$ werden mit einer Quote[1] von 2^{-m-1} nicht erkannt
- Bündelfehler größerer Länge $(l > m + 1)$ werden mit einer Quote 2^{-m} nicht erkannt

[1]Quote=Anzahl nicht erkannter Fehler / Anzahl fehlerhafter Blöcke

Häufig verwendete Generatorpolynome:

$$
\begin{aligned}
\text{CRC-4}: \quad g(x) =& x^4 + x^3 + 1 \\
\text{CRC-4}: \quad g(x) =& x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
\text{CRC-5}: \quad g(x) =& (x+1)(x^4 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\
\text{CRC-7}: \quad g(x) =& (x+1)(x^6 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
=& x^7 + x^6 + x^4 + 1 \\
\text{CRC-8}: \quad g(x) =& (x+1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
=& x^8 + x^2 + x + 1 \quad \text{(CCITT)} \\
\text{CRC-12}: \quad g(x) =& (x+1)(x^{11} + x^2 + 1) \\
=& x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{(CCITT)} \\
\text{CRC-16}: \quad g(x) =& (x+1)(x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
=& x^{16} + x^{12} + x^5 + 1 \quad \text{(CCITT)} \\
\text{CRC-16}: \quad g(x) =& (x+1)(x^{15} + x + 1) \\
=& x^{16} + x^{15} + x^2 + 1 \quad \text{(IBM)} \\
\text{CRC-32}: \quad g(x) =& x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + \\
& + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \quad \text{(Ethernet)}
\end{aligned}
$$

6.4. Endliche Körper (Galois-Felder)

- Galois-Felder existieren für $q = p^m$ Elemente mit p einer Primzahl und $m = 1, 2, 3, ...$
- Im Fall von $m = 1$ spricht man auch von einem **P**rimkörper, im Fall $m > 1$ von einem **E**rweiterungskörper

6.4.1. Primitives Element

- In jedem Primkörper gibt es mindestens ein Element, dessen $p-1$ Potenzen alles Elemente des Primfeldes außer Null erzeugen – dieses Element wird als **p**rimitives Element α bezeichnet, Eigenschaft: $\alpha^0 = \alpha^{p-1} = 1$
- Multiplikation ist einfach Addition der Potenzen des primitiven Elementes (Bei der Addition der Potenzen wird modulo (p-1) gerechnet)

6.4.2. Ordnung eines Elements

Die Ordnung eines Elements a aus GF(p) entspricht dem kleinsten Exponent r $(r > 0)$, bei dem gilt: $a^r = 1 \mod p$

6.4.3. Irreduzible Polynome

- Ein Polynom $p(x)$ mit Koeffizienten aus GF(p) heißt irreduzibel über GF(p), wenn es nicht als Polynom kleineren Grades, die ebenfalls Koeffizienten aus GF(p) haben, dargestellt werden kann
- Ein irreduzibles Polynom hat somit keine Nullstelle in GF(p) (notwendige aber keine hinreichende Bedingung für Irreduzibilität, da Multiplikation zweier irreduzibler Polynome keine Nullstelle ergibt)

m	$p(x)$	m	$p(x)$
1	$x+1$	13	$x^{13}+x^4+x^3+x+1$
2	x^2+x+1	14	$x^{14}+x^{10}+x^6+x+1$
3	$x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$	15	$x^{15}+x+1$
4	$x^4+x+1,\ x^4+x^3+1$	16	$x^{16}+x^{12}+x^3+x+1$
5	$x^5+x^2+1,\ x^5+x^2+1$	17	$x^{17}+x^3+1$
6	$x^6+x+1,\ x^6+x^5+1$	18	$x^{18}+x^7+1$
7	$x^7+x+1,\ x^7+x^3+1$	19	$x^{19}+x^5+x^2+x+1$
8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	20	$x^{20}+x^3+1$
	$x^8+x^5+x^3+x+1$		
	$x^8+x^5+x^3+x^2+1$		
9	x^9+x^4+1	21	$x^{21}+x^2+1$
10	$x^{10}+x^3+1$	22	$x^{22}+x+1$
11	$x^{11}+x^2+1$	23	$x^{23}+x^5+1$
12	$x^{12}+x^6+x^4+x+1$	24	$x^{24}+x^7+x^2+x+1$

6.4.4. Primitive Polynome

6.4.5. Darstellungsformen von Erweiterungskörpern

Beispiel: Erweiterungskörper GF(2^3) mit $p(x) = x^3 + x + 1$

Potenz			Polynom	Vektor	Binär	Integer
$\alpha^{-\infty}$	$=$		$=0$	$\widehat{=}$ (0 0 0)	$\widehat{=}$ 000	$\widehat{=}$ 0
α^0	$=$		$=1$	$\widehat{=}$ (1 0 0)	$\widehat{=}$ 001	$\widehat{=}$ 1
α^1	$=$		$=\alpha$	$\widehat{=}$ (0 1 0)	$\widehat{=}$ 010	$\widehat{=}$ 2
α^2	$=$		$=\alpha^2$	$\widehat{=}$ (0 0 1)	$\widehat{=}$ 100	$\widehat{=}$ 4
α^3	$=$	$\alpha+1$	$=\alpha+1$	$\widehat{=}$ (1 1 0)	$\widehat{=}$ 011	$\widehat{=}$ 3
α^4	$=$	$\alpha^2+\alpha$	$=\alpha^2+\alpha$	$\widehat{=}$ (0 1 1)	$\widehat{=}$ 110	$\widehat{=}$ 6
α^5	$=$	$\alpha^3+\alpha^2$	$=\alpha^2+\alpha+1$	$\widehat{=}$ (1 1 1)	$\widehat{=}$ 111	$\widehat{=}$ 7
α^6	$=$	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$	$=\alpha^2+1$	$\widehat{=}$ (1 0 1)	$\widehat{=}$ 101	$\widehat{=}$ 5

6.5. Reed-Solomon-Codes

- RS-Code existieren für die Parameter $(n, k, d_{\min})_q$
- Für beliebige Parameter m (Stufenzahl) und $d_{\min}$ gilt für den Code: $(2^m - 1, 2^m - d_{\min}, d_{\min})_{2^m}$
- RS-Codes sind MDS-Codes
  (erfüllen Singleton-Schranke: $d_{\min} = n - k + 1$)
- Übliche Wahl: $d_{\min} = 2t + 1$ (t Anzahl der max. korr. Fehler)

Definition der RS-Codes:

- Der Code besteht bei einem wählbaren Parameter w aus allen Polynomen mit der Eigenschaft, dass n-k aufeinander folgende Potenzen von α Nullstellen jedes Codepolynoms sind:

  $$C = a(x) \text{ mit } a(\alpha^w) = a(\alpha^{w+1}) = ... = a(\alpha^{w+(n-k)-1}) = 0$$

- Die häufige Wahl von $w = 1$ ergibt:

  $$C = a(x) \text{ mit } a(\alpha) = a(\alpha^2) = ... = a(\alpha^{n-k}) = 0 \tag{6.14}$$

- Eindeutige Beschreibung eines Codes durch
  - Codeparameter $(n, k, d_{\min})_q$
  - Primitives Polynom zur Definition des Galois-Feldes
  - Entwurfsparameter: Lage der Nullstellen im Codewort

Generator- und Prüfpolynom

- Eine Nullstelle bei α^i bedeutet das Vorhandensein eines Linearfaktors $(x - \alpha^i)$ im Codepolynom
- Damit kann das Generatorpolynom und das Prüfpolynom definiert werden:

$$g(x) = \prod_{i=1}^{d_{\min}-1} (x - \alpha^i) \tag{6.15}$$

- Das Prüfpolynom hat genau dort Nullstellen, wo das Generatorpolynom keine hat:

$$h(x) = \prod_{i=d_{\min}}^{n} (x - \alpha^i) \tag{6.16}$$

Die Decodierung erfolgt im Allgemeinen in 4 Schritten:

1. Syndromberechnung
2. Berechnung des Fehlerstellenpolynoms
   (z. B. PGZ-Decoder oder Euklidischer Alg.)
3. Berechnung der Fehlerstellen
   (z. B. Chien-Suche)
4. Berechnung der Fehlerwerte
   (z. B. Lös. lin. Gl. oder Forney-Alg.)

Für die Ausfallstellendecodierung vereinfacht sich der Ablauf auf Schritte 1+4, da die Fehlerstellen ja bereits bekannt sind.

Syndrom:

1. Das Empfangswort wird an den Stellen ausgewertet, an denen das Codepolynom Nullstellen hat
2. Es wird hier vom Entwurfsparameter $w = 1$ ausgegangen

$$S_j = y(\alpha^j) = e(\alpha^j) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \alpha^{jk} = \sum_{k=0}^{n-1} e_k \alpha^{jk} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, 2t \tag{6.17}$$

3. Das Syndrom ist die Lösung des Fehlerpolynoms an den Stellen $\alpha \dots \alpha^{2t}$
4. Polynomdarstellung des Syndroms

$$S(x) = \sum_{i=0}^{2t-1} S_{i+1} x^i = S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \dots + S_{2t} x^{2t-1} \tag{6.18}$$

1. Angenommen das Fehlermuster $e(x)$ hat ν Fehler an den Stellen $i_1, i_2, \dots, i_\nu$, also

   $$e(x) = e_{i_1} x^{i_1} + e_{i_2} x^{i_2} + \dots + e_{i_\nu} x^{i_\nu}$$

   mit $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\nu}$ den Fehlerwerten an den Stellen $i_1, i_2, \dots, i_\nu$. Dann erhält man für das Syndrom:

   $$S_j = \sum_{l=1}^{\nu} e_{i_l} (\alpha^j)^{i_l} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, 2t \tag{6.19}$$

2. Ausgeschrieben ergibt sich das Gleichungssystem:

   $$\begin{aligned} S_1 &= e_{i_1}\alpha^{i_1} + e_{i_2}\alpha^{i_2} + \dots + e_{i_\nu}\alpha^{i_\nu} \\ S_2 &= e_{i_1}\alpha^{2i_1} + e_{i_2}\alpha^{2i_2} + \dots + e_{i_\nu}\alpha^{2i_\nu} \\ &\vdots \\ S_{2t} &= e_{i_1}\alpha^{2ti_1} + e_{i_2}\alpha^{2ti_2} + \dots + e_{i_\nu}\alpha^{2ti_\nu} \end{aligned} \tag{6.20}$$

6.6. Netzwerkcodierung

t.b.d.

7. Bitübertragung

7.1. Grenzen der Übertragungsrate

Limitierungen:

- Bandbreite des Kanals: B
- Rauschleistung (Noise): N
- Signalleistung: S

Resultat :

- Maximale Schrittgeschwindigkeit (Nyquistrate): $r_{s,max}$
- Maximale Menge Informationsbits pro Schritt: C
- Maximale Datenrate (Kanalkapazität): $C^* = r_{s,max} \cdot C$

$$r_s = \frac{2B}{1+r} \tag{7.1}$$

- Rolloff-Faktor: $r = 0 \dots 1$ (praktisch $0,15 \dots 1$)

7.1.1. AWGN-Kanal

$$C = \frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\,(1 + S/N) \ \ \text{[Bit/Übertragungsschritt]} \tag{7.2}$$

$$C^* = B\,\mathrm{ld}\,(1 + S/N)\ \text{[bit/s]} \tag{7.3}$$

7.1.2. Binärer symmetrischer Kanal (BSC)

$$C = 1 + P_\mathrm{e} \cdot \log_2(P_\mathrm{e}) + (1 - P_\mathrm{e}) \cdot \log_2(1 - P_\mathrm{e})\ \text{[Bit/Übertragungsschritt]} \tag{7.4}$$

7.1.3. Binärer Auslöschungskanal (BEC)

$$C = 1 - P_\mathrm{e}\ \text{[Bit/Übertragungsschritt]} \tag{7.5}$$

7.2. Pegelrechnung

7.2.1. Leistungspegel

$$\begin{aligned} L_P &= 10 \cdot \log \frac{P_a}{P_b}\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{L_P}{10\,\mathrm{dB}}} \\ &= 10 \cdot \log \frac{U_a^2/R_a}{U_b^2/R_b}\,\mathrm{dB} \\ &= 20 \cdot \log \frac{U_a}{U_b} + 10 \log \frac{R_b}{R_a}\,\mathrm{dB} \\ &= L_U + 10 \log \frac{R_b}{R_a}\,\mathrm{dB} \end{aligned} \tag{7.6}$$

7.2.2. Spannungspegel

$$L_U = 20 \cdot \log \frac{U_a}{U_b}\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow \frac{U_a}{U_b} = 10^{\frac{L_U}{20\,\mathrm{dB}}} \tag{7.7}$$

Bei $R_a = R_b$ gilt $L_p = L_u$.

Bei einem relativem Pegel erfolgt der Bezug auf einen beliebigen Referenzwert, oft der Eingangswert einer Schaltung.

Bei einem absoluten Pegel erfolgt ein Bezug auf einen definierten Referenzwert. Zur Kennzeichnung eines absoluten Pegels wird die dB-Bezeichnung um einen Zusatz, die Einheit der verwendeten Größe, ergänzt.Oft verwendete absolute Pegel:

- dBm: absoluter Leistungspegel bezogen auf 1 mW
- dBW: absoluter Leistungspegel bezogen auf 1 W
- dBµV: absoluter Spannungspegel bezogen auf 1 µV
- dBV: absoluter Spannungspegel bezogen auf 1 V

Pegel in [dB]	-10	-3	0	2	3	6	9	10	20	30	40
Leistungsverhältnis	0,1	0,5	1	1,58	2	4	8	10	100	1000	10000
Spannungsverhältnis	0,316	0,71	1	1,26	1,41	2	2,8	3,16	10	31,6	100

Tabelle 7.1.: Umrechnung Pegel-Leistung-Spannung

Es ist zu beachten, dass sich beim Rechnen mit Pegeln folgende Pseudoeinheiten ergeben:

$$\mathrm{dB} \pm \mathrm{dB} = \mathrm{dB} \tag{7.8}$$

$$\mathrm{dBm} \pm \mathrm{dB} = \mathrm{dBm} \tag{7.9}$$

$$\mathrm{dBm} - \mathrm{dBm} = \mathrm{dB} \tag{7.10}$$

$$\mathrm{dBm} + \mathrm{dBm} = \text{nicht definiert} \tag{7.11}$$

8. Physik

8.1. Konstanten

Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c = 299792458$ m/s
Bolzmannsche Konstante	$k = 1,38066 \cdot 10^{-23}$ J/K
Elementarladung	$e = 1,6021773 \cdot 10^{-19}$ C
Erdumfang	ca. $40\,000\,\mathrm{km}$
Erde-Mond	ca. $400\,000\,\mathrm{km}$
Erde-Sonne (1 AE ca. 8 min)	ca. $150\,000\,000\,\mathrm{km}$
Lichtjahr	ca. 10 Bill. km
Parsec (pc)	ca. 3,26 Lichtjahre
Erde - Alpha Centauri	ca. 4,3 Lichtjahre
Milchstraße, Durchmesser	ca. 100 000 Lichtjahre
Andromeda-Galaxie	ca. 2,5 Mill. Lichtjahre
Laniakea-Supergalaxienhaufen	ca. 520 Mill. Lichtjahre
Durchmesser des Universums	> 100 Bill. Lichtjahre (28 Gigaparsec)
Sterne im Universum	$70 \cdot 10^{21}$
Atome im Universum	$> 10^{84}$
Alter des Universums	$13,8 \cdot 10^{9}$ Jahre
Kreisfrequenz	$\Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
Elektrischer Schwingkreis	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Elektrische Leistung	$P = UI$
Elektrische Arbeit	$W = QU$

8.2. Harmonische Schwingung

Index

8.3. Xelatex-Test

Hier erzählt man nun, was man alles gemacht hat.

Anführungszeichen: “Hallo” „sasd“ »Alles«

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + \sqrt{2}@€ \tag{8.1}$$

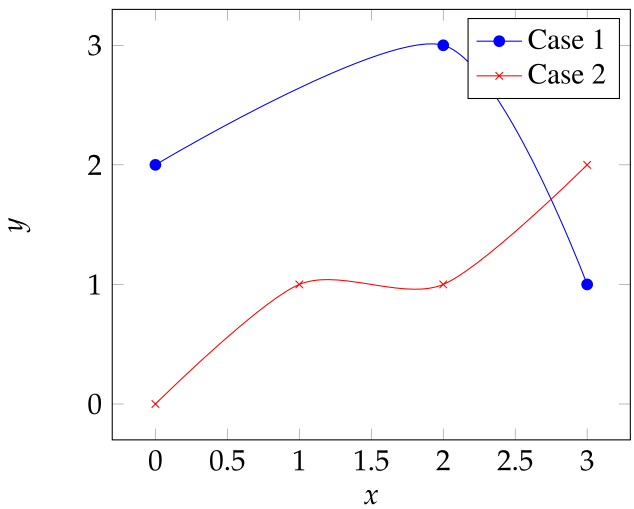
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + \sqrt{2} \tag{8.2}$$

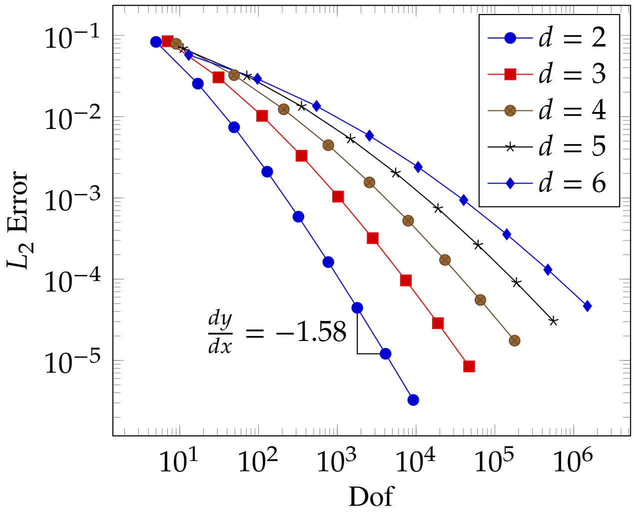
$$\vdash \forall x[(Fx \vee Gx) \rightarrow {\sim}Hx] \tag{8.3}$$
$$\models \neg\exists y \forall x[x \in y \leftrightarrow x \notin x] \tag{8.4}$$
$$\not\models x \cap (y \cup z) \neq (x \cap y) \cup (x \cap z) \tag{8.5}$$
$$\vdash [\![\alpha]\!] = \aleph_0 \rightarrow \alpha \ncong \wp(\alpha) \tag{8.6}$$
$$\ulcorner \psi[(\ x)\varphi x]\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \ulcorner(\exists x)[\varphi x \wedge (\forall z)(\varphi z \supset x = z) \wedge \psi x]\urcorner \tag{8.7}$$
$$\vdash (P \quad Q) \quad (\Box P \quad Q) \tag{8.8}$$

8.3.1.

Все люди рождаются свободными и равными в своем достоинстве и правах.

```
люди рождаются
```





10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
L_2 Error
10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6
Dof
$d = 2$
$d = 3$
$d = 4$
$d = 5$
$d = 6$
$\frac{dy}{dx} = -1.58$