HTWD, Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. M. Voigt

Operations Research
Algorithmen auf Graphen

OR für Wirtschaftsingenieure

Übungsserie 2:

Eulertour, Matching, Laufzeiten von Algorithmen

Aufgabe 1 :

Für jede der folgenden Teilaufgaben gilt: Ist die Antwort "ja", so geben Sie an, ob der Eulerzug offen oder geschlossen ist und bestimmen Sie einen entsprechenden Eulerzug. Ist die Antwort "nein", so geben Sie einen Grund dafür an.

(a) Besitzt der Graph aus Serie 1 Aufgabe 5 einen Eulerzug?

(b) Besitzt der Graph aus Serie 1 Aufgabe 5 nach Entfernung der Kante 89 einen Eulerzug?

(c) Besitzt der Graph aus Serie 1 Aufgabe 5 nach Entfernung der Kante 49 einen Eulerzug?

(d) Besitzt der Graph aus Serie 1 Aufgabe 5 nach Entfernung der Kanten $P2, 25$ und 57 einen Eulerzug?

(e) Besitzt der Graph aus Serie 1 Aufgabe 5 nach Entfernung der Kanten $P3, 36, 68$ und 79 einen Eulerzug?

Aufgabe 2 :

(a) Bestimmen Sie ein gewichtetes minimales Matching für $G = K_4$ mit $V(K_4) = \{1, 2, 3, 4\}$ und der Kantengewichtsfunktion aus Tabelle $T1$.

(b) Bestimmen Sie ein gewichtetes minimales Matching für $G = K_6$ mit $V(K_6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und der Kantengewichtsfunktion aus Tabelle $T2$.

(c) Wieviele verschiedene perfekte Matchings besitzt der K_8 und wieviele besitzt der K_{10}. Begründen Sie Ihre Antwort.

T1	1	2	3	4
1	0	40	20	28
2	40	0	45	28
3	20	45	0	20
4	28	28	20	0

T2	1	2	3	4	5	6
1	0	40	20	28	45	61
2	40	0	45	28	45	36
3	20	45	0	20	28	52
4	28	28	20	0	20	36
5	45	45	28	20	0	30
6	61	36	52	36	30	0

Aufgabe 3 :

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter Graph mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, und $f : E \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtsfunktion.

Algorithmus A:

1. Eingabe von G mittels der Adjazenzmatrix
2. Eingabe von f mittels einer (n, n)-Matrix $B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = f(ij)$ falls die Kante ij existiert und $b_{ij} = 0$ sonst.
3. Berechne $f(G) := \sum\limits_{e \in E} f(e)$
4. Ausgabe: Summe der Kantengewichte: $f(G)$

(a) Welches ist das kleinste k, so dass gilt $A \in O(n^k)$?

(b) Sei $s = 2n^2$ (Anzahl der Eingabedaten). Welches ist das kleinste k, so dass gilt $A \in O(s^k)$?

Aufgabe 4 :

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter Baum mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, und $f : E \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtsfunktion.

Algorithmus T:

1. Eingabe von G: Für jeden Knoten $i = 1, 2, \ldots, n$ gebe eine Liste seiner Nachbarknoten, sowie das jeweilige dazugehörige Kantengewicht ein.
2. Berechne $f(G) := \sum\limits_{e \in E} f(e)$
3. Ausgabe: Summe der Kantengewichte: $f(G)$

Welches ist das kleinste k, so dass gilt $T \in O(n^k)$?

Aufgabe 5 :

Algorithmus E:

1. Eingabe: $n \in \mathbb{N}$
2. Ausgabe: Alle Graphen G mit n Knoten mittels ihrer Adjazenzmatrix

(a) Wieviele solche Graphen gibt es mit $2, 3$ beziehungsweise 4 Knoten?

(b) Welches ist das kleinste k, so dass gilt $E \in O(n^k)$?

(c) Wie lange braucht ein Rechner, wenn er alle Graphen mit 20 Knoten untersuchen soll und wir annehmen, dass er 10^{15} Graphen pro Sekunde untersuchen kann.

(Bemerkung: der zur Zeit schnellste Rechner (Stand: 11/15) schafft $33,86 \cdot 10^{15}$ Operationen pro Sekunde, s. www.top500.org)

Teillösungen, nicht vollständig

1. (a) nein, weil er 4 Knoten mit ungeradem Grad besitzt, (b) er besitzt einen offenen Eulerzug (2 Knoten ungeraden Grades), (c) nein, s. (a), (d) ja, einen offenen Eulerzug, (e) ja, einen geschlossenen Eulerzug
2. (a) $M = \{13, 24\}$, $\sum\limits_{e \in M} f(e) = 48$, (b) $M = \{13, 26, 45\}$, $\sum\limits_{e \in M} f(e) = 76$ (15 verschiedene perfekte Matchings sind zu untersuchen), (c) K_8 hat 105 und K_{10} hat 945 verschiedene perfekte Matchings.
3. (a) $k = 2$ quadratische Laufzeit, (b) $k = 1$ lineare Laufzeit
4. $k = 1$ lineare Laufzeit
5. (a) 2 Knoten: 2, 3 Knoten: 8, 4 Knoten: 64, (b) es gibt kein solches k, (c) $\approx 4,976 \cdot 10^{34}$ Jahre