OR für Wirtschaftsingenieure

Übungsserie 5:

Das Traveling Salesman Problem

Aufgabe 1 :

Ein Vertreter, der in der Stadt S_1 lebt soll die Städte S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 besuchen und in die Stadt S_1 zurückkehren. In der nebenstehenden Tabelle sind die Entfernungen zwischen je zwei dieser Städte gegeben, wobei eine Einheit jeweils 10 km entspricht. Gesucht ist eine Rundtour des Vertreters durch diese sechs Städte, die möglichst kurz ist.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	-	9	8	20	25	9
S_2	9	-	7	18	10	8
S_3	8	7	-	13	21	6
S_4	20	18	13	-	21	15
S_5	25	10	21	21	-	12
S_6	9	8	6	15	12	-

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph, dessen Knoten den Städten $S_1, \ldots, S_6$ entsprechen. Weiterhin definieren wir eine Gewichtsfunktion $f : E \to \mathbb{R}$, wobei $f(S_iS_j)$ der Entfernung zwischen den Städten S_i und S_j entspricht.

(a) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der NN-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(b) Bestimmen Sie ein Minimalgerüst T von (G, f). Skizzieren Sie das Gerüst und berechnen Sie $\sum\limits_{e \in E(T)} f(e)$.

(c) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der MST-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(d) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der Christofidis-Heuristik. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Konstruieren Sie aus T einen Eulerschen Graphen T^* durch Hinzufügen geeigneter Kanten (Tipp: minimales perfektes Matching).
- Geben Sie eine Eulertour von T^* an.
- Ermitteln Sie mit Hilfe der Eulertour einen Hamiltonkreis. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

Aufgabe 2 :

Ein Vertreter, der in der Stadt S_1 lebt soll die Städte S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 besuchen und in die Stadt S_1 zurückkehren. In der nebenstehenden Tabelle sind die Entfernungen zwischen je zwei dieser Städte gegeben, wobei eine Einheit jeweils 10 km entspricht. Gesucht ist eine Rundtour des Vertreters durch diese sechs Städte, die möglichst kurz ist.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	-	13	20	5	10	12
S_2	13	-	19	10	11	20
S_3	20	19	-	8	14	15
S_4	5	10	8	-	15	13
S_5	10	11	14	15	-	9
S_6	12	20	15	13	9	-

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph, dessen Knoten den Städten $S_1, \ldots, S_6$ entsprechen. Weiterhin definieren wir eine Gewichtsfunktion $f : E \to \mathbb{R}$, wobei $f(S_iS_j)$ der Entfernung zwischen den Städten S_i und S_j entspricht.

(a) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der NN-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(b) Bestimmen Sie ein Minimalgerüst T von (G, f). Skizzieren Sie das Gerüst und berechnen Sie $\sum\limits_{e \in E(T)} f(e)$.

(c) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der MST-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(d) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der Christofidis-Heuristik. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Konstruieren Sie aus T einen Eulerschen Graphen T^* durch Hinzufügen geeigneter Kanten (Tipp: minimales perfektes Matching).
- Geben Sie eine Eulertour von T^* an.
- Ermitteln Sie mit Hilfe der Eulertour einen Hamiltonkreis. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

Aufgabe 3 :

Ein Vertreter, der in der Stadt S_1 lebt soll die Städte S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 und S_7 besuchen und in die Stadt S_1 zurückkehren. In der nebenstehenden Tabelle sind die Entfernungen zwischen je zwei dieser Städte gegeben, wobei eine Einheit jeweils 10 km entspricht. Gesucht ist eine Rundtour des Vertreters durch diese sieben Städte, die möglichst kurz ist.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_1	-	16	8	18	19	17	11
S_2	16	-	16	24	17	8	12
S_3	8	16	-	10	11	13	10
S_4	18	24	10	-	9	18	24
S_5	19	17	11	9	-	10	21
S_6	17	8	13	18	10	-	14
S_7	11	12	10	24	21	14	-

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph, dessen Knoten den Städten $S_1, \ldots, S_7$ entsprechen. Weiterhin definieren wir eine Gewichtsfunktion $f : E \to \mathbb{R}^+$, wobei $f(S_iS_j)$ der Entfernung zwischen den Städten S_i und S_j entspricht.

(a) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der NN-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(b) Bestimmen Sie ein Minimalgerüst T von (G, f). Skizzieren Sie das Gerüst und berechnen Sie $\sum_{e \in E(T)} f(e)$.

(c) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der MST-Heuristik. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

(d) Ermitteln Sie eine Rundtour mit Hilfe der Christofidis-Heuristik. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Konstruieren Sie aus T einen Eulerschen Graphen T^* durch Hinzufügen geeigneter Kanten (Tipp: minimales perfektes Matching).
- Geben Sie eine Eulertour von T^* an.
- Ermitteln Sie mit Hilfe der Eulertour einen Hamiltonkreis. Wie viele Kilometer muss der Vertreter auf dieser so ermittelten Tour zurücklegen?

Aufgabe 4 :

Weisen Sie mit Hilfe der Branch & Bound Methode nach, dass der Vertreter aus Aufgabe 3 mindestens 650 km zurücklegen muß. Tipp: Unterscheiden Sie, ob der Vertreter die Strecke von S_4 nach S_5 benutzt oder nicht.

Aufgabe 5 :

Ein Vertreter, der in der Stadt S_1 lebt soll die Städte S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 besuchen und in die Stadt S_1 zurückkehren. In der nebenstehenden Tabelle sind die Entfernungen zwischen je zwei dieser Städte gegeben, wobei eine Einheit jeweils 1 km entspricht. Gesucht ist eine Rundtour des Vertreters durch diese sieben Städte, die möglichst kurz ist.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	0	40	20	28	45	61
S_2	40	0	45	28	45	36
S_3	20	45	0	20	28	52
S_4	28	28	20	0	20	36
S_5	45	45	28	20	0	30
S_6	61	36	52	36	30	0

Weisen Sie mit Hilfe der Branch & Bound Methode nach, dass eine kürzeste Tour 166 km lang ist und geben Sie eine entsprechende Tour an.

Aufgabe 6 :

Ein Vertreter, der in der Stadt S_1 lebt soll die Städte S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 besuchen und in die Stadt S_1 zurückkehren. In der nebenstehenden Tabelle sind die Entfernungen zwischen je zwei dieser Städte gegeben, wobei eine Einheit jeweils 1 km entspricht. Gesucht ist eine Rundtour des Vertreters durch diese sieben Städte, die möglichst kurz ist.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	0	20	30	35	15	22
S_2	20	0	42	28	21	33
S_3	30	42	0	43	23	17
S_4	35	28	43	0	37	26
S_5	15	21	23	37	0	39
S_6	22	33	17	26	39	0

Weisen Sie mit Hilfe der Branch & Bound Methode nach, dass eine kürzeste Tour 129 km lang ist und geben Sie eine entsprechende Tour an.

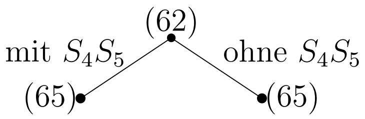
Ergebnisse

1(b): Gerüst: $\{S_1S_3, S_3S_6, S_2S_3, S_2S_5, S_3S_4\}$, Wert: 44

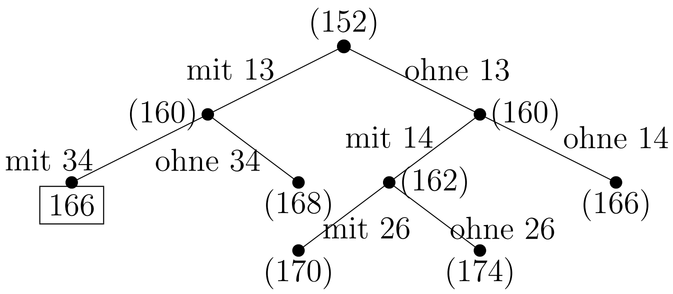
2(b): Gerüst: $\{S_1S_4, S_1S_5, S_2S_4, S_3S_4, S_5S_6\}$, Wert: 42

3(b): Gerüst: $\{S_1S_3, S_2S_6, S_3S_4, S_3S_7, S_4S_5, S_5S_6\}$, Wert: 55

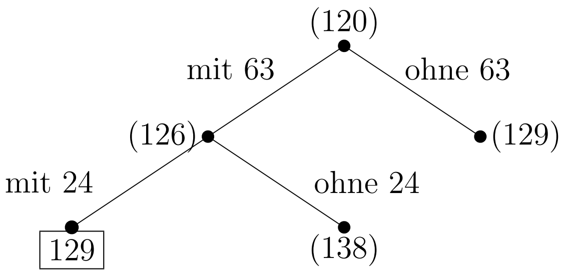
4: Da auf beiden Ästen des Entscheidungsbaumes die 65 (also 650 km) als Schranke erreicht wird, kann eine Rundtour nicht kürzer sein, ist also 650 km lang oder länger.



5. Um im folgenden Baum die Schranke 166 ganz links zu erhalten braucht man folgende Zusatzüberlegung: wenn 13 und 34 zur Tour gehören, dann kann 41 nicht zur Tour gehören (Kurzkreis)



6.



Tabellen für Aufgabe 5

	1	2	3	4	5	6
1	-	40	20	28	45	61
2	40	-	45	28	45	36
3	20	45	-	20	28	52
4	28	28	20	-	20	36
5	45	45	28	20	-	30
6	61	36	52	36	30	-

Tabellen für Aufgabe 6

	1	2	3	4	5	6
1	0	20	30	35	15	22
2	20	0	42	28	21	33
3	30	42	0	43	23	17
4	35	28	43	0	37	26
5	15	21	23	37	0	39
6	22	33	17	26	39	0

