HTWD, Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. M. Voigt

Prüfungsklausur Operations Research, 20.7.2016

A	Name, Vorname	Matr. Nr.

Aufgabe	**1**	**2**	**3a**	**3b**	**4**	**5**	**6**	**gesamt**
erreichbare P.	**12+(5)**	**12+(4)**	**5**	**7**	**7**	**8**	**14**	**65+(9)**
erreichte P.								

Bemerkungen: Die angewendeten Algorithmen müssen erkannbar sein. Fragen sind mit einem Satz zu beantworten.

Aufgabe 1 :

Auf dem Arbeitsblatt ist ein Graph mit einer Kantenbewertung gegeben. Dieser Graph ist das Modell eines Straßennetzes wobei die Kantenbewertung die Länge der entsprechenden Straßen in Längeneinheiten (1 Längeneinheit = 100 m) angibt.

(a) Ermitteln Sie die kürzesten Wege von Kreuzung 6 zu allen anderen Kreuzungen. Verdeutlichen Sie den Ablauf des Algorithmus (möglichst anhand von Tabellen). Markieren Sie die entsprechenden Kanten im Graphen.

(b) Ein Fahrzeug der Straßenreinigung soll am Depot (Kreuzung 1) starten, jede Straße mindestens einmal abfahren und zum Depot zurückkehren.

Die Länge der vom Fahrzeug zu fahrenden Strecke soll minimiert werden. Bestimmen Sie die Straßen, die das Fahrzeug unter dieser Bedingung doppelt fahren muß. Wieviele Kilometer sind damit zusätzlich (zur Gesamtlänge der zu reinigenden Straßen) zurückzulegen? Der Lösungsweg ist anzugeben.

Tipp: Die Länge eines kürzesten Weges von Kreuzung 4 zu Kreuzung 10 ist 16 Längeneinheiten. Von Kreuzung 4 zu Kreuzung 8 und von Kreuzung 8 zu Kreuzung 10 ist der kürzeste Weg die direkte Verbindung.

(c) **Zusatzaufgabe:** Wegen Straßenbauarbeiten ist die Straße zwischen den Kreuzungen 8 und 11 gesperrt und muss logischerweise nicht gereinigt werden. Welche Straßen sind in diesem Fall doppelt zu fahren, wenn wieder die Länge der Fahrstrecke des Reinigungsfahrzeuges minimert werden soll?

Tipp: Die Länge eines kürzesten Weges von 4 nach 11 ist 22 Längeneinheiten und von 10 nach 11 ist der kürzeste Weg die direkte Verbindung.

Aufgabe 2 :

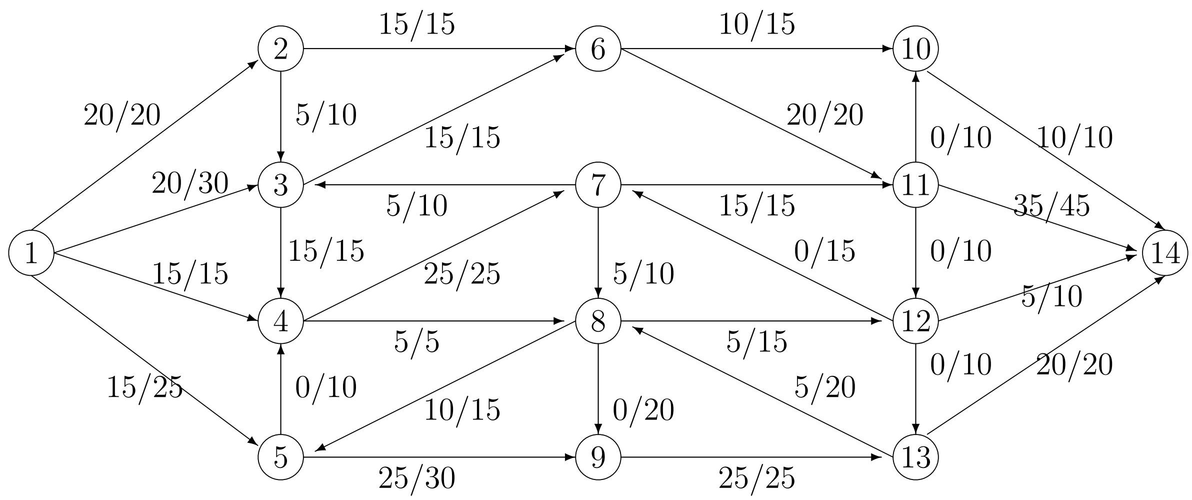
Für das gegebene Netzwerk (s. unten) $\mathcal{N} = (G, c, s, t)$ mit $s = 1$ und $t = 14$ bestimme man mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson einen maximalen (s, t)-Fluß, sowie einen minimalen (s, t)-Schnitt $F = I^+(A)$. Es ist bereits ein Fluß f vorgegeben. Die Werte an den Kanten bedeuten $f(e)/c(e)$, wobei $c(e)$ die maximale Kapazität der jeweiligen Kante angibt.

Verdeutlichen Sie den Verlauf des Algorithmus, insbesondere die Markierungen mit Tabellen oder/und direkt in der Figur. Geben Sie den Wert des maximalen Flusses und die Kantenmenge des minimalen Schnittes an.

Zusatzaufgabe: Ist es sinnvoll zur Erhöhung der Kapazität des Netzwerkes die Kapazität der Kante von 4 nach 8 auf 10 Einheiten zu erhöhen?

Welche Maßnahmen könnte man durchführen, um die Kapazität des Netzwerkes um 5 Einheiten zu erhöhen?

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit 1 bis 2 Stichpunkten.



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	

Fortsetzung auf dem Arbeitsblatt

Aufgabe 3 :

Die Firma Data-Fix mit Sitz in S_1 möchte die Orte S_1, S_2, S_3, S_4 und S_5 mittels Glasfaserkabel verbinden. Die jeweiligen Entfernungen in km zwischen den Orten sind in nebenstehender Tabelle gegeben.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-	19	20	10	17
S_2	19	-	21	14	18
S_3	20	21	-	13	12
S_4	10	14	13	-	21
S_5	17	18	12	21	-

(a) (ohne Arbeitsblatt) Die Gesamtlänge des Kabelnetzes soll minimal werden. Wie sollten die Kabel verlegt werden, um dieses Ziel zu erreichen? Beantworten Sie die Frage durch Angabe eines entsprechenden Algorithmus, sowie einer Skizze und der Angabe der Gesamtlänge der Kabel.

(b) Ein Vertreter der Firma soll zu Vorabsprachen alle Orte nacheinander besuchen und dann nach S_1 zurückkehren. Gibt es eine solche Rundtour, die kürzer als 67 km ist? Wenden Sie zur Beantwortung der Frage die Branch & Bound Methode an. Untersuchen Sie insbesondere die Fälle, wenn die Strecke von S_1 nach S_4 zur Tour gehört, bzw. nicht dazu gehört. Benutzen Sie das Arbeitsblatt. Geben Sie auch den Entscheidungsbaum mit den entsprechenden Schranken an.

Aufgabe 4 :

Eine Agrargenossenschaft besitzt 6 Mähdrescher, die sie für die Ernte auf ihren Feldern einsetzen kann. Aktuell soll auf 5 Feldern geerntet werden. Die jeweiligen Kosten für den Einsatz des Mähdreschers M_i für die Ernte auf dem Feld F_j in Geldeinheiten sind in nebenstehender Tabelle gegeben. Die Gesamtkosten für den Mähdreschereinsatz sollen minimiert werden. Geben Sie eine Zuordnung der Mähdrescher zu den Feldern an, die die Kosten minimiert. Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
M_1	11	19	20	10	17
M_2	13	10	21	14	12
M_3	20	21	13	18	10
M_4	12	14	13	15	16
M_5	17	18	12	15	10
M_6	19	18	15	21	17

Der Algorithmus zur Ermittlung der Zuordnung soll erkennbar sein. Nutzen Sie das Arbeitsblatt. Tipp: Beginnen Sie mit einer Spaltenreduktion.

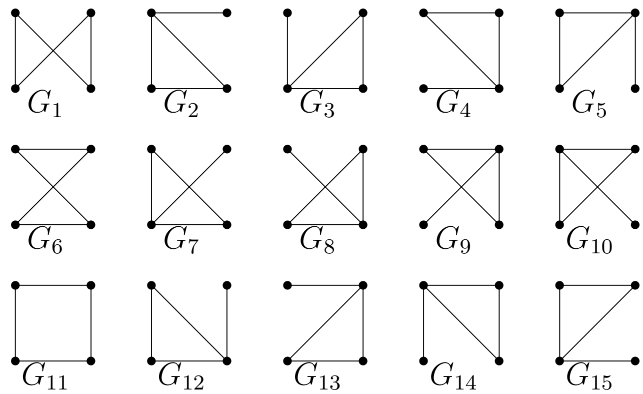
Aufgabe 5 :

Skizzieren Sie den Graphen G, der nebenstehender Adjazenzmatrix A entspricht. Geben Sie eine Minimalgradfolge, sowie die Coloring Number $col(G)$ an. Färben Sie die Knoten des Graphen unter Verwendung des Greedy-Algorithmus und der angegebenen Minimalgradfolge.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 :

Wenn man vom vollständigen Graphen K_n je zwei Kanten entfernt, entstehen $\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n)$ verschiedene Graphen. Es gibt also 15 Graphen mit 4 Knoten und 4 Kanten (s. Skizze)



(a) Welche dieser Graphen sind isomorph zueinander?

(b) Geben Sie die chromatischen Zahlen $\chi(G_5)$ und $\chi(G_6)$ an.

(c) Sei G ein Graph der durch Entfernung zweier Kanten aus dem K_n entstanden ist. Setzen Sie in der Ungleichung für die chromatische Zahl $a \leq \chi(G) \leq b$ die bestmöglichen Grenzen a und b ein.

(d) Der vollständige Graph K_8 hat 28 Kanten. Wieviele Stunden benötigen Sie ungefähr, um alle Graphen mit 8 Knoten und 26 Kanten zu skizzieren, wenn Sie für einen solchen Graphen 10 Sekunden benötigen?

(e) Welche Laufzeit hat der folgende Algorithmus K? Wählen Sie eine der folgenden Angaben: $O(n^2), O(n^4), O(n^6)$ oder exponentiell. Begründen Sie Ihre Antwort mit 1 bis 2 Stichpunkten.

Algorithmus K**:**

(e1) Eingabe: $n \in \mathbb{N}$

(e2) Ausgabe: Alle Graphen G mit n Knoten, die durch Entfernung zweier Kanten aus dem K_n entstehen, mittels ihrer Adjazenzmatrix.

(f) Wieviele Jahre benötigen Sie ungefähr, wenn Sie alle Graphen mit 8 Knoten skizzieren wollen, wobei Sie für einen Graphen 10 Sekunden benötigen und täglich (365 Tage im Jahr) 12 Stunden arbeiten?

Ergebnisse A:

1: (a) kürzeste Wege Gerüst: $\{69, 56, 45, 9\,11, 16, 89, 35, 10\,11, 7\,10, 23\}$

(b) doppelt zu fahren sind: $\{45, 56, 8\,10\}$, das sind 2,5 km zusätzlich

(c) doppelt zu fahren sind: $\{45, 56, 10\,11\}$

2.: Wert$(f) = 75$, $I^+(A) = \{26, 36, 7\,11, 12\,14, 13\,14\}$

Es macht keinen Sinn die Kapazität der Kante 48 zu erhöhen, da diese vor dem minimalen Schnitt liegt, der aktuelle Fluss also dort nicht beschränkt wird.

Um die Kapazität des Netzwerkes zu erhöhen könnte man die Kapazität der Kante 7 11, oder 12 14 oder 13 14 erhöhen oder die Richtung der Kante 11 12 umkehren.

3: (a) Minimalgerüst: $\{S_1S_4, S_4S_3, S_3S_5, S_4S_2\}$, Gesamtlänge: 49 km

(b) allgemeine Schranke (nach Zeilen- und Spaltenreduktion): 62 km, Schranke mit S_1S_4: 67 km, Schranke ohne S_1S_4: 67 km $\Rightarrow$ eine Rundtour kann nicht kürzer als 67 km sein.

4.: Achtung: es muss eine fiktive Spalte F_6 (von Beginn an) eingeführt werden.

Zuordnung: $M_1F_4, M_2F_2, M_3F_5, M_4F_1, M_5F_3$, Gesamtkosten: 54 GE

5: 1. Folge (z.B.) 1(2),2(3),3(3),4(2),6(2),5(2),7(2),8(1),9(0) $\Rightarrow$

Minimalgradfolge + Färbung: 9(1),8(2),7(3),5(3),6(1),4(1), 3(2), 2(4), 1(1), $col(G) = 4$

6: (a) G_1, G_6, G_{11} sind paarweise isomorph und alle anderen sind ebenfalls paarweise isomorph.

(b) $\chi(G_5) = 3, \chi(G_6) = 2$

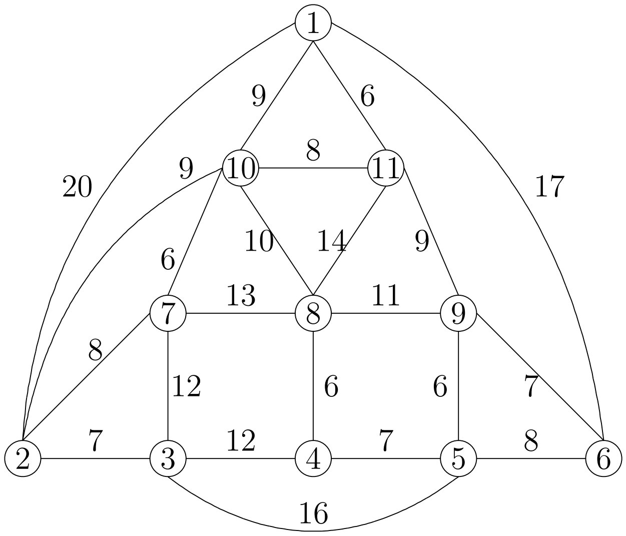
(c) $n - 2 \leq \chi(G) \leq n - 1$

(d) 1.05 Stunden

(e) Die Laufzeit des Algorithmus ist $O(n^6)$, da es $\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n)$ solche Graphen gibt (s. Aufgabenstellung) und die Ausgabe jedes dieser Graphen $O(n^2)$ Operationen (Adjazenzmatrix) erfordert.

(f) etwa 170,24 Jahre

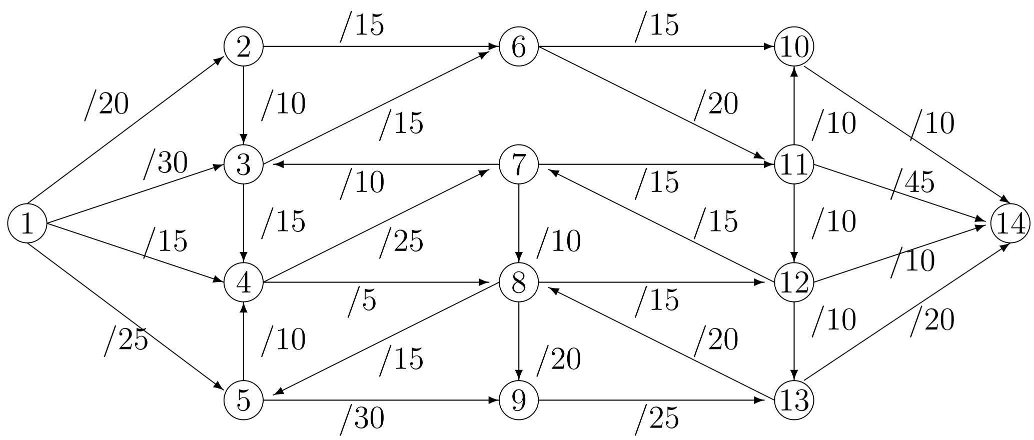
A: Arbeitsblatt Aufgabe 1:



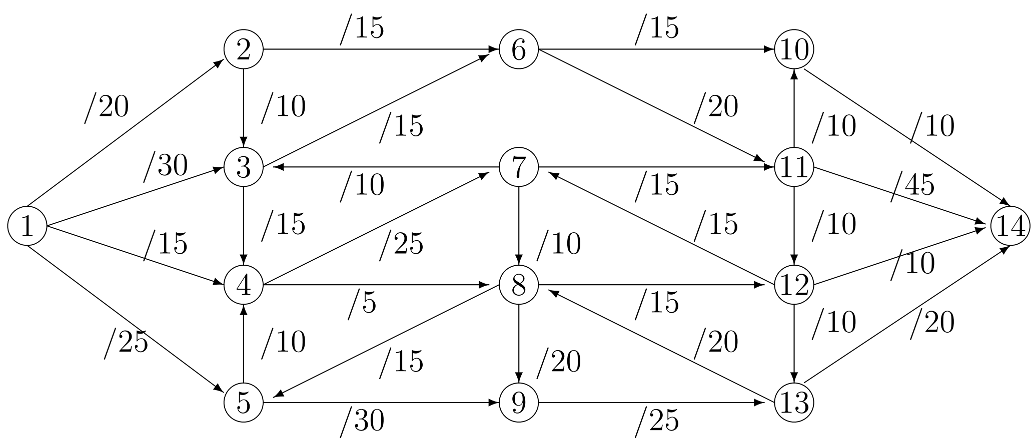
Antwort (b):

Antwort (c):

A: Arbeitsblatt Aufgabe 2:



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	

Wert(f **)=**

Kantenmenge des minimalen Schnittes: $I^+(A) =$

Antworten zu Fragen der Kapazitätserhöhungen:

A: Arbeitsblatt Aufgabe 3(b):

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-	19	20	10	17
S_2	19	-	21	14	18
S_3	20	21	-	13	12
S_4	10	14	13	-	21
S_5	17	18	12	21	-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-				
S_2		-			
S_3			-		
S_4				-	
S_5					-

A: Arbeitsblatt Aufgabe 4:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1	11	19	20	10	17	
M_2	13	10	21	14	12	
M_3	20	21	13	18	10	
M_4	12	14	13	15	16	
M_5	17	18	12	15	10	
M_6	19	18	15	21	17	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1						
M_2						
M_3						
M_4						
M_5						
M_6						

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1						
M_2						
M_3						
M_4						
M_5						
M_6						

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1						
M_2						
M_3						
M_4						
M_5						
M_6						

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1						
M_2						
M_3						
M_4						
M_5						
M_6						

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
M_1						
M_2						
M_3						
M_4						
M_5						
M_6						