HTWD, Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. M. Voigt

Prüfungsklausur Operations Research, 12.07.2018

B	Name, Vorname	Matr. Nr.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**gesamt**
erreichbare P.	**13**	**(7)**	**8**	**14**	**9**	**9**	**17**	**70+7**
erreichte P.								

Bemerkungen: Die angewendeten Algorithmen müssen erkennbar sein und nachvollzuiehbar sein. Fragen sind mit einem Satz zu beantworten.

Aufgabe 1

Frau Fleissig bekommt den Auftrag in der Ort Werbematerial zu verteilen.

Auf dem Arbeitsblatt sehen Sie das für Frau Fleissig relevante Strassennetz, wobei die Zahlen jeweils die Länge der Strasse in Längeneinheiten angeben. Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter.

Frau Fleissig wohnt an der Kreuzung 1, möchte dort starten, jede Strasse durchlaufen und nach Hause zurückkehren.

(a) Bestimmen Sie die kürzesten Wege von der Kreuzung 4 zu allen anderen Kreuzungen. Verwenden sie das Arbeitsblatt. Markieren Sie die zum Gerüst gehörigen Kanten.

(b) Welche Strassen muss Frau Fleissig doppelt laufen, wenn sie die Gesamtstrecke minimieren will? Wie viele Meter legt sie damit zusätzlich zurück?

(c) Ein Kollege bietet Frau Fleissig an, die Strassen 67 und 69 zu übernehmen. Um wie viele Meter verkürzt sich damit die Gesamtstrecke von Frau Fleissig? Begründen Sie Ihre Antwort mit wenigen Stichpunkten.

Tipp: Der kürzeste Weg von 2 nach 7 ist 14 LE lang, von 2 nach 9 sind es 21 LE und von 7 nach 9 sind es 15 LE.

Zusatzaufgabe 2 (ohne Arbeitsblatt)

Besitzt der vollständig paare Graph $K_{6,6}$ einen offenen, oder einen geschlossenen oder gar keinen Eulerzug? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei G eine Graph, der durch Entfernung von zwei Kanten aus dem $K_{6,6}$ entsteht. Unter welcher Voraussetzung (an die entfernten Kanten) besitzt G einen Eulerzug? Ist dieser Eulerzug offen oder geschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 :

Die Verkehrsbetriebe wollen die aktuell zur Verfügung stehenden Fahrzeuge $F_1, F_2, \ldots, F_6$ den verschiedenen Linien $L_1, L_2, \ldots, L_6$ zuordnen. Dabei ist nicht jedes Fahrzeug für jede Linie gleichgut geeignet (Größe, Ausstattung, Reichweite,..). Um die Eignung eines Fahrzeuges für eine Linie zu bewerten, wurden für fünf Kriterien Noten zwischen 1 und 5 vergeben und aufsummiert. Damit ist also die Eignung eines Fahrzeuges für eine Linie umso besser, je niedriger die Bewertung ist.

Auf dem Arbeitsblatt sehen Sie diese Bewertung. Ermitteln Sie eine Zuordnung der Fahrzeuge zu den Linien, die die Summe der Bewertungen minimiert.

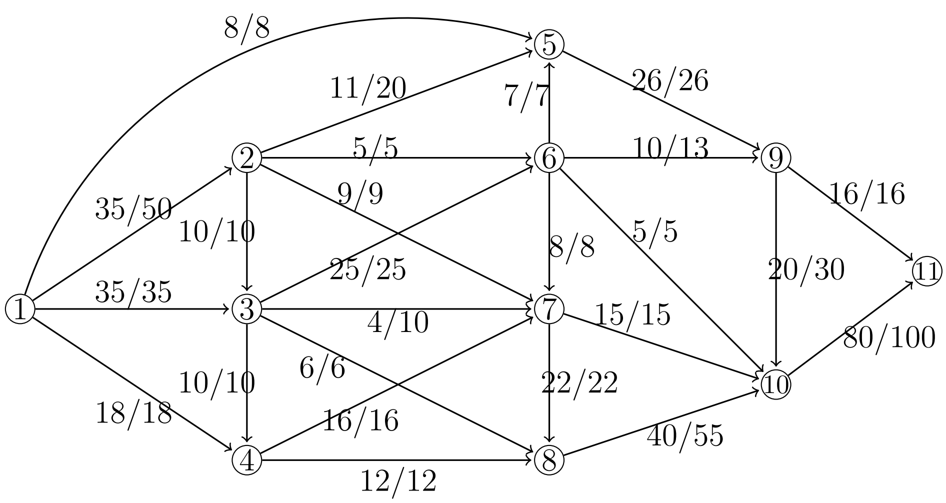
Geben Sie die Zuordnung der Fahrzeuge zu den Linien, sowie die minimale Bewertungssumme an.

Aufgabe 4

Für das gegebene Netzwerk (s. unten) $\mathcal{N} = (G, c, s, t)$ mit $s = 1$ und $t = 11$ bestimme man mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson einen maximalen (s,t)-Fluß, sowie einen minimalen (s,t)-Schnitt $F = I^+(A)$. Es ist bereits ein Fluß f vorgegeben. Die Werte an den Kanten bedeuten $f(e)/c(e)$, wobei $c(e)$ die maximale Kapazität der jeweiligen Kante angibt.

Verdeutlichen Sie den Verlauf des Algorithmus, insbesondere die Markierungen mit Tabellen. Geben Sie den Wert des maximalen Flusses und die Kantenmenge des minimalen Schnittes an.

Um wieviele Einheiten erhöht sich der maximale Fluss, wenn die Kapazität der Kante 7 10 auf 35 Einheiten erhöht wird? Begründen Sie Ihre Antwort mit 1 bis 2 Stichpunkten.



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	

Fortsetzung auf dem Arbeitsblatt

Aufgabe 5

Frau Fleissig soll das Werbematerial auch in anderen Orten verteilen, d.h, sie soll ausgehend vom Ort A auch die Orte B, C, D, E und F bereisen. Die Entfernungen in km zwischen je zwei Orten sind auf dem Arbeitsblatt angegeben. Frau Fleissig möchte ihre Rundreise natürlich so kurz, wie möglich gestalten.

Weisen Sie mit Hilfe der Branch & Bound Methode nach, dass eine solche Rundreise nicht kürzer als 170 km sein kann. Untersuchen Sie dazu, ob die Verbindung vom Ort C zum Ort D zur Rundreise gehört, oder nicht. Geben Sie den Entscheidungsbaum an und erläutern Sie Ihr Ergebnis mit wenigen Stichpunkten.

Aufgabe 6 (ohne Arbeitsblatt)

Sei K_{2n} der vollständige Graph mit den Knoten $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, sowie $w : E(K_{2n}) \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtsfunktion. Die $(2n, 2n)$-Matrix $W = (w(ij))$ enthält die Kantengewichte.

(a) **Algorithmus**

(A1) **Eingabe:** n, Matrix W, sowie ein perfektes Matching $M = \{v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2n-1}v_{2n}\}$

(A2) Berechne die Summe der Kantengewichte des gegebenen Matchings

$$W(M) = \sum_{e \in M} w(e) = w(v_1v_2) + w(v_3, v_4) + \ldots + w(v_{2n-1}v_{2n}).$$

(A3) **Ausgabe:** $W(M)$

Bestimmen Sie eine obere Schranke $S(n)$ für die Anzahl der Operationen des Algorithmus in Abhängigkeit von n.

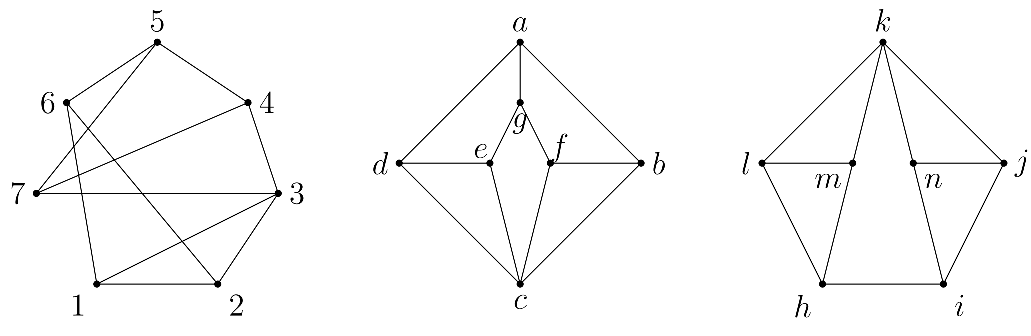
Wie viele Sekunden benötigt der Algorithmus für $n = 10$ höchstens (ungefähr), sofern der verwendete Rechner 10^6 Operationen pro Sekunde durchführt?

(b) Wir betrachten den vollständigen Graphen K_{18} mit $V = \{1, 2, \ldots, 18\}$. Wir möchten **alle** perfekten Matchings dieses Graphen auflisten lassen.

Wieviele Tage benötigt der Rechner dafür ungefähr, wenn er 10 Matchings pro Sekunde ausgibt und 24 Stunden am Tag arbeitet? Geben Sie den Rechenweg an

Tipp: Wie man die Anzahl dieser Matchings berechnet, haben Sie sich in Serie 2, Aufgabe 2 überlegt.

Aufgabe 7 (ohne Arbeitsblatt)



G_1 G_2 G_3

(a) Geben Sie eine einfache Begründung dafür an, dass die chromatische Zahl des Graphen G_3 nicht kleiner als 3 ist.

(b) Ist der Graph G_3 mit 3 Farben färbbar? Wenn ja, geben Sie eine 3-Färbung an, wenn nein begründen Sie warum es keine 3-Färbung gibt.

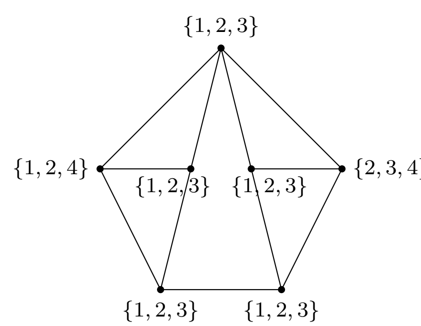
Tipp: Versuchen Sie, den Graphen mit 3 Farben zu färben und starten Sie damit beim Knoten k.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Minimalgradfolge die Coloring Number $col(G_3)$ des Graphen G_3.

(d) Färben Sie die Knoten des Graphen G_2 mittels Greedy-Algorithmus und der folgenden Knotenreihenfolge: c, d, e, b, f, g, a.

(e) Für den Graphen G_3 ist die nebenstehende Listenzuordnung $\mathcal{L}$ gegeben. Ist G_3 für diese Listenzuordnung $\mathcal{L}$-färbbar? Falls ja, geben Sie eine Färbung an, falls nein begründen Sie warum es keine solche Färbung gibt.

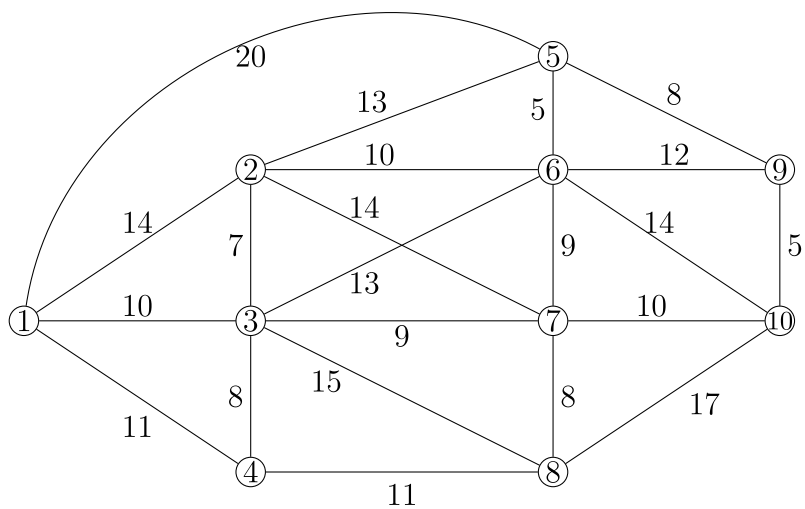
(f) Geben Sie für G_3 sowohl die chromatische Zahl $\chi(G_3)$, als auch die listenchromatische Zahl $\chi_\ell(G_3)$ an.



G_3

(g) Welche der Graphen G_1, G_2 und G_3 sind isomorph zueinander? Geben Sie für jedes der Paare $G_1 - G_2$, $G_1 - G_3$ sowie $G_2 - G_3$ entweder eine Knotenzuordnung an, oder eine Begründung dafür, dass die Graphen nicht isomorph sind.

Aufgabe 1, Gruppe B



(a)

Antwort (b):

Antwort (c):

Aufgabe 3, Gruppe B

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1	12	13	14	10	15	14
F_2	5	7	9	9	5	5
F_3	9	10	12	14	8	11
F_4	15	14	13	16	10	13
F_5	10	5	7	6	8	12
F_6	15	20	14	20	15	10

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

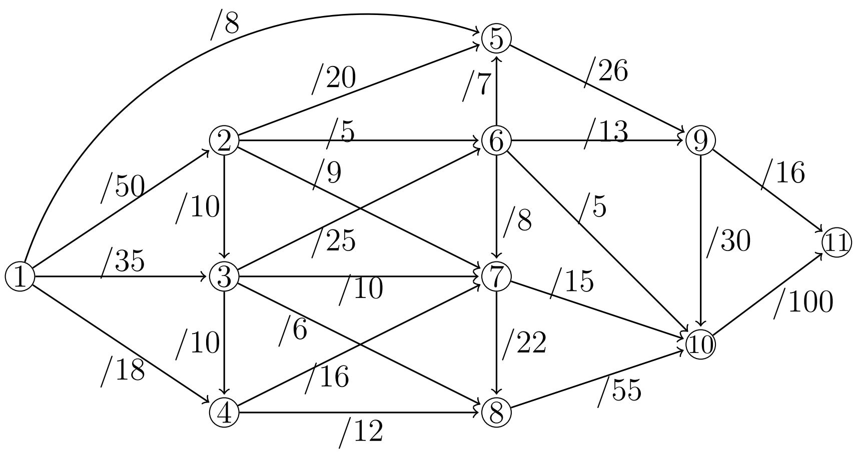
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

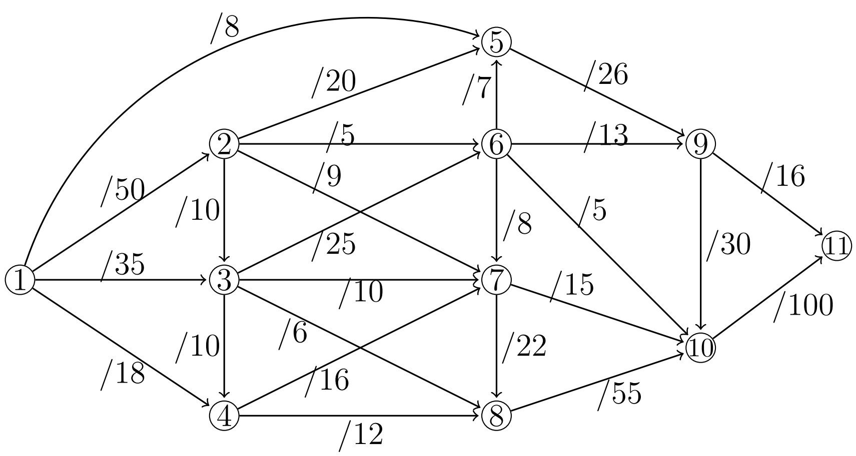
Gesamtsumme:

Zuordnung:

Aufgabe 4, Gruppe B



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	



x	
y	
$Vor(y)$	
$d(y)$	

$Wert(f) =$

$I^{+}(A) =$

Antwort:

Aufgabe 5, Gruppe B

	A	B	C	D	E	F
A	-	50	30	50	20	25
B	50	-	60	70	50	15
C	30	60	-	40	35	50
D	50	70	40	-	60	55
E	20	50	35	60	-	50
F	25	15	50	55	50	-

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

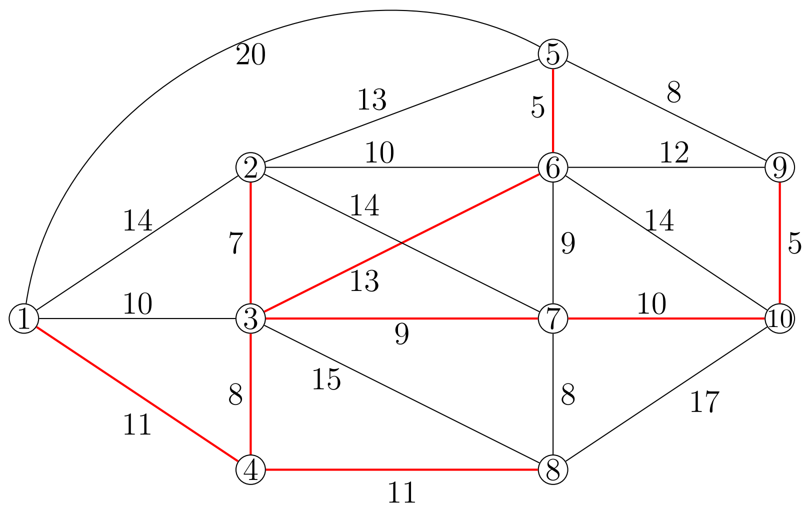
	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

Ergebnisse - nicht vollständig

Aufgabe 1, Gruppe B



(a)

$s=4$	1	2	3	5	6	7	8	9	10		
$d(x_i)/v(x_i)$	11/4	-	$\boxed{8/4}$	-	-	-	11/4	-	-		$e=43$
$d(x_i)/v(x_i)$	$\boxed{11/4}$	15/3		-	21/3	17/3	11/ 4	-	-		$e=14$
$d(x_i)/v(x_i)$		15/3		31/1	21/3	17/3	$\boxed{11/4}$	-	-		$e=48$
$d(x_i)/v(x_i)$		$\boxed{15/3}$		31/1	21/3	17/3		-	28/8		$e=23$
$d(x_i)/v(x_i)$				28/2	21/3	$\boxed{17/3}$		-	28/8		$e=37$
$d(x_i)/v(x_i)$				28/2	$\boxed{21/3}$			-	27/7		$e=36$
$d(x_i)/v(x_i)$				$\boxed{26/6}$				33/6	27/7		$e=56$
$d(x_i)/v(x_i)$								33/6	$\boxed{27/7}$		$e=7\,10$
$d(x_i)/v(x_i)$								$\boxed{32/10}$			$e=9\,10$
$d(x_i)/v(x_i)$											

Antwort (b): Sie muss die Straßen $\{23, 34, 7\,10, 9\,10\}$ doppelt laufen und legt damit 30LE=300 Meter zusätzlich zurück.

Antwort (c): Sie spart die Straßen 67 und 69 (21 LE), sowie die doppelten Straßen 7 10 und 10 9 (15LE), da jetzt die Knoten 7 und 9 auch geraden Grad haben ⇒ Sie läuft damit $36LE = 360$ Meter weniger.

Aufgabe 3, Gruppe B

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	
F_1	12	13	14	10	15	14	-10
F_2	5	7	9	9	5	5	-5
F_3	9	10	12	14	8	11	-8
F_4	15	14	13	16	10	13	-10
F_5	10	5	7	6	8	12	-5
F_6	15	20	14	20	15	10	-10

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1	2	3	4	0	5	4
F_2	0	2	4	4	0	0
F_3	1	2	4	6	0	3
F_4	5	4	3	6	0	3
F_5	5	0	2	1	3	7
F_6	5	10	4	10	5	0
			-2			

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	
F_1	2	3	2	$\boxed{0}$	5	4	
F_2	$\boxed{0}$	2	2	4	0	0	
F_3	1	2	$\boxed{2}$	6	0	3	-1
F_4	5	4	1	6	$\boxed{0}$	3	-1
F_5	5	$\boxed{0}$	0	1	3	7	
F_6	5	10	2	10	5	$\boxed{0}$	
					+1		

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1	2	3	2	$\boxed{0}$	6	4
F_2	$\boxed{0}$	2	2	4	1	0
F_3	0	1	1	5	$\boxed{0}$	2
F_4	4	3	$\boxed{0}$	5	0	2
F_5	5	$\boxed{0}$	0	1	4	7
F_6	5	10	2	10	6	$\boxed{0}$

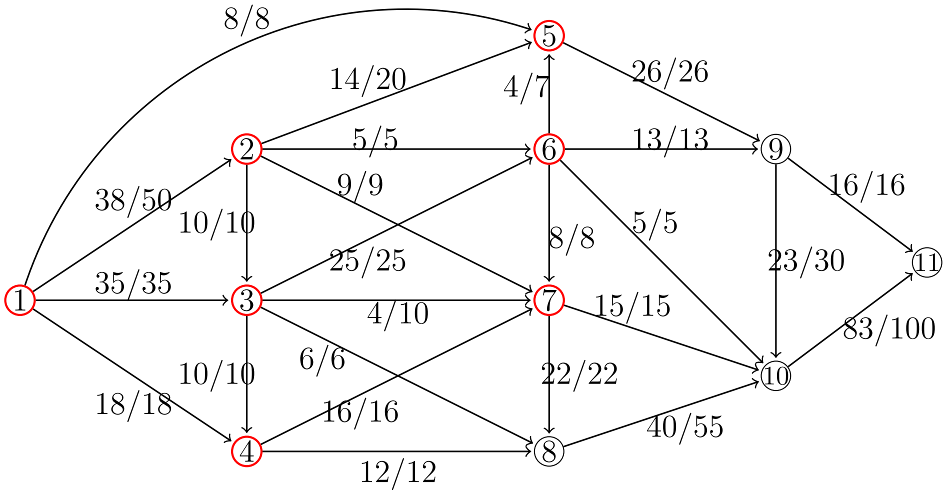
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
F_1						
F_2						
F_3						
F_4						
F_5						
F_6						

Gesamtsumme: 51

Zuordnung: $F_1 - L_4, F_2 - L_1, F_3 - L_5, F_4 - L_3, F_5 - L_2, F_6 - L_6$

Aufgabe 4, Gruppe B



x	1	2	5	6	3	7	4	
y	2	5	6	3	7	4	-	
$Vor(y)$	1	2	-5	-6	3	-7	-	
$d(y)$	12	6	4	4	4	4	-	

$Wert(f) = 99$

$I^+(A) = \{59, 69, 6\,10, 7\,10, 78, 38, 48\}$

Antwort: Die Kapazität des Netzwerkes würde sich um 4 Einheiten erhöhen. Bis zur 7 kommen noch 4 Einheiten durch (s. Tabelle), die dann auch über die 10 zur 11 weiterkommen würden.

Aufgabe 5, Gruppe B

	A	B	C	D	E	F	
A	-	50	30	50	20	25	-20
B	50	-	60	70	50	15	-15
C	30	60	-	40	35	50	-30
D	50	70	40	-	60	55	-40
E	20	50	35	60	-	50	-20
F	25	15	50	55	50	-	-15

	A	B	C	D	E	F
A	-	30	10	30	0	5
B	35	-	45	55	35	0
C	0	30	-	10	5	20
D	10	30	0	-	20	15
E	0	30	15	40	-	30
F	10	0	35	40	35	-
				-10		

	A	B	C	D	E	F
A	-	30	10	20	0	5
B	35	-	45	45	35	0
C	0	30	-	0	5	20
D	10	30	0	-	20	15
E	0	30	15	30	-	30
F	10	0	35	30	35	-

Rundreise? A-E-A , Widerspruch

ohne CD

	A	B	C	D	E	F
A	-	30	10	20	0	5
B	35	-	45	45	35	0
C	0	30	-	∞	5	20
D	10	30	0	-	20	15
E	0	30	15	30	-	30
F	10	0	35	30	35	-
				-20		

mit CD

	A	B	C	D	E	F	
A	-	30	10		0	5	
B	35	-	45		35	0	
C							
D	10	30	∞		20	15	-10
E	0	30	15		-	30	
F	10	0	35		35	-	
			-10				

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B		-				
C			-			
D				-		
E					-	
F						-

Nach Zeilen- und Spaltenreduktion existiert noch keine Rundreise. Dann ergibt sich sowohl mit CD, als auch ohne CD eine untere Schranke von 170 km, so dass eine Rundreise auf jeden Fall nicht kürzer als diese 170 km sein kann.

Aufgabe 2, Gruppe B

$K_{6,6}$ besitzt einen geschlossenen Eulerzug, da alle Knoten geraden Grad (6) haben.

Haben die entfernten Kanten einen Knoten gemeinsam, so hat dieser Knoten dann Grad 4, die anderen beiden Endknoten Grad 5. Somit hat der Graph 2 Knoten mit ungeradem Grad und somit einen offenen Eulerzug.

Haben die entfernten Kanten keinen Knoten gemainsam, so entstehen 4 Knoten mit Grad 5 und es existiert kein Eulerzug.

Aufgabe 6, Gruppe B

(a) Anzahl der Operationen: (A1): $1 + 4n^2 + n$, (A2): n, (A3): 1

$\Rightarrow L(A) = 4n^2 + 2n + 2$ für $n = 10$ ergibt sich $L(A) = 422$

Der Rechner benötigt etwa $\frac{422}{10^6} = 4,22 \cdot 10^{-4}$ Sekunden.

(b) Anzahl der Matchings: $Z = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 17 = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$

Der Rechner benötigt damit $Z/(10 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24) = 39,88$ Tage.

Aufgabe 7, Gruppe B

(a) $\chi(G_3) \geq 3$, weil G_3 Dreiecke (ungerade Kreise) besitzt.

(b) Nein, G_3 ist nicht mit 3 Farben färbbar, weil: h muss dieselbe Farbe erhalten wie k, i ebenso. Da h und i benachbart sind, führt das zum Widerspruch.

(c) z.B. $h(3), m(2), \ell(1), k(2), n(2), j(1), i(0) \Rightarrow col(G_3) = 3 + 1 = 4$

(d) $c(1), d(2), e(3), b(2), f(3), g(1), a(3)$

(e) Ja, G_3 ist für die gegebene Liste L-färbbar, z.B.

$h(2), i(1), \ell(4), m(2), n(2), j(3), k(1)$

(f) $\chi(G_3) = \chi_\ell(G_3) = 4$

(g) G_3 ist nicht isomorph zu G_2, da $4 = \chi(G_3) \neq \chi(G_2) = 3$, s (b), (d)

G_3 ist isomorph zu G_1, z.B. $3 - k, 1 - \ell, 2 - m, 7 - n, 4 - j, 5 - i, 6 - h$

G_2 ist nicht isomorph zu G_1, da G_1 isomorph zu G_3 ist und dieser nicht isomorph zu G_2.