## 4.6 Die 2-Phasen-Methode

Problem: Das LOP liegt häufig nicht in Standard Form vor. Um trotzdem den Simplexalgorithmus anwenden zu können ist eine Transformation des Problems in ein Ersatzproblem in Standard Form nötig.

### 4.6.1 Transformation in Standard Form

Beispiel: Serie 13, 3 (g)

(a) Transformation der Zielfunktion: s. AB 8

Falls ein Minimierungsproblem $Z = c^T x \longrightarrow$ min vorliegt, so erhält man daraus das äquivalente Maximierungsproblem $-Z = (-c)^T \vec{x} \longrightarrow$ max, indem alle Zielfunktionskoeffizienten mit $(-1)$ multipliziert werden.

(b) Transformation der Restriktionen: s. AB 8

Zuerst wird jede Restriktion, deren rechte Seite negativ ist, mit $(-1)$ multipliziert z.B.: $3x_1 - 4x_2 \leq -5 \Rightarrow -3x_1 + 4x_2 \geq 5$;
Danach werden in den so entstandenen Restriktionen Schlupfvariable $y_i \geq 0$ und/oder **Hilfsschlupfvariable** $h_i \geq 0$ eingeführt, um ein Gleichungssystem in kanonischer Form zu erhalten.

Problem: Bei Restriktionen mit = oder $\geq$ ist die übliche Startlösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$ möglicherweise nicht zulässig. Es muß zunächst eine erste zulässige Lösung berechnet und dafür passende Basisvariable gefunden werden.

$$\begin{array}{llcccccccl}
1. & \vec{a}_i^T\vec{x} \leq b_i & \Longrightarrow & \vec{a}_i^T\vec{x} & & & + & y_i & = & b_i & (BV:\ y_i) \\
2. & \vec{a}_i^T\vec{x} = b_i & \Longrightarrow & \vec{a}_i^T\vec{x} & & & + & h_i & = & b_i & (BV:\ h_i) \\
3. & \vec{a}_i^T\vec{x} \geq b_i & \Longrightarrow & \vec{a}_i^T\vec{x} & - & y_i & + & h_i & = & b_i & (BV:\ h_i)
\end{array}$$

mit $\vec{a_i}^{\,T} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$

(c) Transformation der Variablen: s. AB 8

In Abhängigkeit von den vorgegebenen Vorzeichenbeschränkungen werden die Variablen $x_j$ gegebenenfalls durch neue, nichtnegative Variable $x'_j$, $x''_j$ substituiert:

$$\begin{array}{llcccc}
1. & x_j \geq 0 & \Longrightarrow & \textbf{keine Substitution} & & \\
2. & x_j \leq 0 & \Longrightarrow & (x_j = -x'_j) & \Longrightarrow & x'_j \geq 0 \\
3. & x_j\ bel. & \Longrightarrow & (x_j = x'_j - x''_j) & \Longrightarrow & x'_j,\, x''_j \geq 0
\end{array}$$

### 4.6.2 Die zwei Phasen

(a) Phase 1:

Bestimmung einer zulässigen Basislösung durch Eliminierung der Hilfsschlupfvariablen:

- Phase-1-Zielfunktion $Z1$:

  Bemerkung: Das originale LOP ist lösbar $\Rightarrow h_i = 0 \; \forall i$

  $\Rightarrow$ Zielstellung: $\sum\limits_i h_i \;\rightarrow$ min. Daraus ergibt sich als Hilfszielfunktion:

  $$Z1 = -\sum_i h_i \;\rightarrow \max$$

- Optimalitätsindikatoren für $Z1$:

  Stelle sämtliche Restriktionen, die eine Hilfsschlupfvariable $h_i$ enthalten nach $h_i$ um und setze diese in $Z1$ ein. Wir erhalten $Z1$ in Abhängigkeit von den Nichtbasisvariablen. Die entsprechenden Koeffizienten dienen als Optimalitätsindikatoren.

- $Z1$ im Tableau:

  Im Tableau wird eine zusätzliche (letzte) Z1-Zeile mitgeführt. über diese Zeile wird in Phase 1 die Wahl der Pivotspalte gesteuert.

  Bemerkung: Die Z1-Zeile berechnet sich einfach als die negative Summe aller Zeilen, die Hilfsschlupfvariable enthalten.

- Iteration in Phase 1:

  Die Iteration erfolgt wie gewohnt mit dem einzigen Unterschied, daß die Wahl der Pivotspalte auschließlich über die Z1-Zeile gesteuert wird. Spalten die zu einer Hilsschlupfvariable der Nichtbasis gehören werden gestrichen.

- Ende von Phase 1:

  Phase 1 endet erfolgreich, wenn keine Hilfsschlupfvariablen mehr in der Basis ist, d.h. $h_i = 0 \; \forall i$. Die $Z1$ Zeile enthält dann nur noch Nullen und kann gestrichen werden.

  Eine zulässige Startlösung für das Originalproblem wurde gefunden.

(b) Phase 2: Bestimmung einer optimalen Basislösung

Ausgehend vom Endtableau von Phase 1 wird die übliche Simplexiteration durchgeführt.

(c) Mögliche Probleme in Phase 1:

- Wird in Phase 1 eine optimale Lösung des Ersatzproblems (Phase-1-Zielfunktion) erreicht, bei der noch mindetsens eine Hilfsschlupfvariable positiv ist, so ist das

  $$\boxed{\text{LOP nicht lösbar - der zulässige Bereich ist leer}}$$

- Wird in Phase 1 eine **entartete optimale Lösung** des Ersatzproblems gefunden, bei der noch Hilfsschlupfvariablen in der Basis sind, aber $Z1 = 0$ gilt, so sind noch weitere Austauschschritte auszuführen.

  Wahl des Pivotelementes: wähle aus einer zu einer Hilfsschlupfvariablen gehörenden Zeile ein Element $\neq 0$.