

1 Logik

Aussagen, Quantoren, Beweise und vollständige Induktion

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte	1
1.2 Verknüpfungen, logische Gesetze und Beweise	2
Mietspiegel-Beispiel	4
Mietspiegel: Ausstattung logisch lesen	5
1.3 Aussagefunktionen und Quantoren	7
1.4 Vollständige Induktion	10

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Definition 1.1 (Aussage). Eine **Aussage** ist ein sprachlicher oder mathematischer Ausdruck, dem eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte **wahr** (1) oder **falsch** (0) zukommt.

Was ist eine Aussage?

Entscheiden Sie jeweils: Aussage oder keine Aussage? Falls es eine Aussage ist, geben Sie – soweit möglich – den Wahrheitswert an.

- (1) $5 + 7 = 13$
- (2) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- (3) $x^2 = 4$
- (4) Berechnen Sie $2 + 3$.
- (5) Jede gerade Zahl größer als 2 ist Summe zweier Primzahlen.
- (6) Mathematik ist das schönste Fach.

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 1.2 (Negation). Die **Negation** $\bar{a}$ einer Aussage a ist genau dann wahr, wenn a falsch ist. Besonders in der Informatik ist dafür auch die Schreibweise $\neg a$ üblich.

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Bei längeren Ausdrücken reicht der Querstrich über die vollständig negierte Aussage, etwa $\overline{(a \wedge b)}$.

Die systematischen Regeln für die Negation quantifizierter Aussagen stehen in Kapitel 1.3.

1.2 Verknüpfungen, logische Gesetze und Beweise

Definition 1.3 (Junktoren). Die Wahrheitswerte der wichtigsten Verknüpfungen zweier Aussagen a und b werden durch eine Wahrheitstabelle festgelegt:

Zeichen	Name	gelesen als
$a \wedge b$	Konjunktion	„ a und b “
$a \vee b$	Disjunktion	„ a oder b oder beides“
$a \dot{\vee} b$	Kontravalenz	„entweder a oder b “
$a \Rightarrow b$	Implikation	„wenn a , dann b “
$a \Leftrightarrow b$	Äquivalenz	„ a genau dann, wenn b “

Wahrheitstabelle der Junktoren

Vervollständigen Sie die Wahrheitstabelle.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \dot{\vee} b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Warum ist eine Implikation mit falscher Prämisse wahr?

Eine Dozentin verspricht:

Wenn Sie mindestens 90 Punkte erreichen, erhalten Sie die Note 1,0.

In welchem der vier Fälle wurde das Versprechen gebrochen?

Punkte	Note 1,0?	Prämisse	Konklusion	Implikation
≥ 90	ja	1	1	
≥ 90	nein	1	0	
< 90	ja	0	1	
< 90	nein	0	0	

Um sprachlich auszudrücken, dass eine Implikation $a \Rightarrow b$ gilt, gibt es viele gleichwertige Formulierungen:

- a impliziert b
- aus a folgt b
- wenn a gilt dann gilt auch b
- a ist hinreichend für b
- b ist notwendig für a

Bindungsstärke

Ohne Klammern gilt die Konvention

Negation $\bar{a}$ vor $\wedge$ vor $\vee$ vor $\dot{\vee}$ vor $\Rightarrow$ vor $\Leftrightarrow$.

Setzen Sie alle ausgelassenen Klammern, sodass die Aussage gleich bleibt:

$$a \Rightarrow \bar{b} \vee c \wedge d.$$

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 1.4 (Tautologie). Eine zusammengesetzte Aussage heißt **Tautologie**, wenn sie für jede Belegung ihrer Teilaussagen wahr ist.

Wenn Verknüpfungen negiert werden sollen, helfen die folgenden Regeln:

Satz 1.1 (De-Morgansche Regeln). Für Aussagen a und b gilt

$$\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow (\bar{a} \vee \bar{b}), \quad \overline{a \vee b} \Leftrightarrow (\bar{a} \wedge \bar{b}). \quad (1.1)$$

In Gleichung 1.1 werden beim Negieren „und“ und „oder“ vertauscht und beide Teilaussagen negiert.

De Morgan mit einer Wahrheitstabelle prüfen

Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass

$$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

eine Tautologie ist.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Mietspiegel-Beispiel

Der Mietspiegel ist laut Anwendungsbereich unter anderem nicht direkt anwendbar, wenn eine Wohnung kleiner als 25 m² oder größer als 150 m² ist, kein Bad besitzt oder keine der dort genannten Heizungsarten hat.

Prädikat	Bedeutung für eine Wohnung
k	Wohnfläche kleiner als 25 m ²
g	Wohnfläche größer als 150 m ²
b	Bad in der Wohnung vorhanden
h	eine der genannten Heizungsarten vorhanden
a	Mietspiegel direkt anwendbar

- (1) Formalisieren Sie das Ausschlusskriterium.
- (2) Negieren Sie die zusammengefassten Ausschlussbedingungen.

Quelle: **Dresdner Mietspiegel 2025, S. 6**. Didaktisch vereinfachter Auszug.

Eigene Lösung / Rechnung:

Mietspiegel: Ausstattung logisch lesen

Auf Seite 9 wird als Ausstattungsmerkmal genannt:

„Einbauküche mit Herd mit Backofenfunktion, Spülbecken, Arbeitsplatte und Kühlschrank oder Geschirrspülmaschine“

Für eine Wohnung bedeuten h , s , p , k und g das Vorhandensein der fünf genannten Bestandteile. e bedeute, dass das Ausstattungsmerkmal erfüllt ist.

- (1) Setzen Sie sinnvolle Klammern und formulieren Sie e .
- (2) Formulieren Sie mit De Morgan, wann das Merkmal nicht erfüllt ist.

Quelle: [Dresdner Mietspiegel 2025, S. 9](#).

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 1.2 (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze). Für Aussagen a , b und c gelten die folgenden Äquivalenzen.

Kommutativgesetze

$$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a, \quad a \vee b \Leftrightarrow b \vee a.$$

Assoziativgesetze

$$(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c),$$

$$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c).$$

Distributivgesetze

$$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Satz 1.3 (Absorptionsgesetze und Umschreiben von Implikation und Äquivalenz). Für Aussagen a und b gilt:

Absorptionsgesetze

$$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a, \quad a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a.$$

Implikation und Äquivalenz

$$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \bar{a} \vee b,$$

$$a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a).$$

Satz 1.4 (Elementarregeln für Wahrheitswerte und Negation). Für jede Aussage a gelten die folgenden Äquivalenzen.

Gesetze mit wahr und falsch

$$a \wedge 1 \Leftrightarrow a, \quad a \vee 0 \Leftrightarrow a,$$

$$a \wedge 0 \Leftrightarrow 0, \quad a \vee 1 \Leftrightarrow 1.$$

Idempotenz und doppelte Negation

$$a \wedge a \Leftrightarrow a, \quad a \vee a \Leftrightarrow a, \quad \bar{\bar{a}} \Leftrightarrow a.$$

Ausgeschlossenes Drittes und Widerspruch

$$a \vee \bar{a} \Leftrightarrow 1, \quad a \wedge \bar{a} \Leftrightarrow 0.$$

Drei grundlegende Beweiswege

Um eine Aussage b unter einer Voraussetzung a zu beweisen, sind besonders wichtig:

- (1) **Direkter Beweis:** von a schrittweise zu b gelangen.
- (2) **Kontraposition:** statt $a \Rightarrow b$ die äquivalente Aussage $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ beweisen.
- (3) **Widerspruchsbeweis:** a und $\bar{b}$ annehmen und daraus einen Widerspruch herleiten.

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational

Führen Sie den Widerspruchsbeweis zu Ende. Verwenden Sie dabei die Aussagen

a : Jede rationale Zahl ist ein Quotient teilerfremder ganzer Zahlen,
 b : $\sqrt{2}$ ist irrational.

Nehmen Sie für den Widerspruch $\bar{b}$ an. Dann ist $\sqrt{2}$ rational und nach a existieren teilerfremde $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ und

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Begründen Sie nacheinander:

- (1) Warum ist m^2 gerade?
- (2) Warum folgt daraus, dass m gerade ist?
- (3) Warum muss dann auch n gerade sein?
- (4) Wo liegt der Widerspruch?

Eigene Lösung / Rechnung:

1.3 Aussagefunktionen und Quantoren

Definition 1.5 (Aussagefunktion). Sei X eine Menge. Ein Ausdruck $a(x)$, der für jedes $x \in X$ eine Aussage liefert, heißt **Aussagefunktion** oder **Prädikat** auf X .

Beispielsweise wird aus

$$a(x) :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist eine Primzahl“}$$

für $X = \mathbb{N}$ durch Einsetzen eine Aussage: $a(5)$ ist wahr, $a(10)$ ist falsch.

Definition 1.6 (Quantoren). Für eine Aussagefunktion $a(x)$ verwenden wir:

Schreibweise	Bedeutung
$\forall x \in X : a(x)$	Für alle x aus X gilt $a(x)$.
$\exists x \in X : a(x)$	Es gibt mindestens ein x aus X mit $a(x)$.

Schreibweise	Bedeutung
$\exists! x \in X : a(x)$	Es gibt genau ein x aus X mit $a(x)$.
$\nexists x \in X : a(x)$	Es gibt kein x aus X mit $a(x)$.

Ist der Grundbereich aus dem Zusammenhang eindeutig, kann „ $\in X$ “ weggelassen werden. So bedeutet etwa $\forall \varepsilon > 0 : a(\varepsilon)$: Für jede positive reelle Zahl ε gilt $a(\varepsilon)$.

Quantifizierte Aussagen lesen

Formulieren Sie in Worten und entscheiden Sie, ob die Aussage wahr ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Die Zahl n darf von ε abhängen.

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 1.5 (Negation von Quantoren). Beim Negieren werden All- und Existenzquantor vertauscht und das Prädikat negiert:

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x \in X : a(x))} &\Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{a(x)}, \\ \overline{(\exists x \in X : a(x))} &\Leftrightarrow \forall x \in X : \overline{a(x)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Gleichung 1.2 macht sichtbar: Ein Gegenbeispiel widerlegt eine Allaussage, während eine negierte Existenzaussage eine Allaussage erzeugt.

Gegenbeispiele finden

Negieren Sie die Aussage

Alle Programme terminieren für jede zulässige Eingabe.

Formulieren Sie die Negation ohne die Wendung „Es gilt nicht, dass ...“.

Eigene Lösung / Rechnung:

Mehrstellige Aussagefunktionen

Ein Prädikat kann mehrere Variablen besitzen. Auf der Menge M aller Personen auf einem Campus sei

$$k(x, y) :\Leftrightarrow \text{„Person } x \text{ kennt Person } y\text{“}.$$

Dabei muss $k(x, y)$ nicht dasselbe bedeuten wie $k(y, x)$.

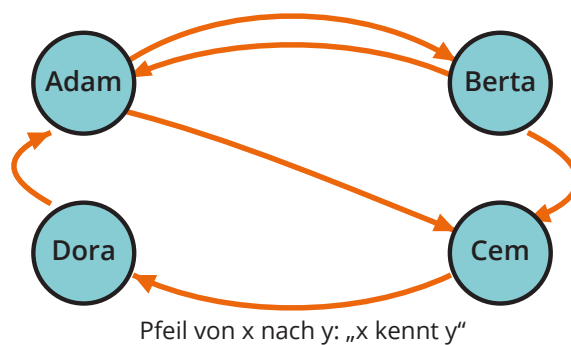


Abbildung 1: Ein gerichtetes Bekanntnetz. Ein Pfeil von einer Person zu einer anderen bedeutet „kennt“.

Campusbeispiel: Sprache in Formeln übersetzen

Übersetzen Sie in Alltagssprache:

- (1) $a(x) :\Leftrightarrow \forall y \in M : k(x, y)$
- (2) $b(y) :\Leftrightarrow \exists x \in M : k(x, y)$
- (3) $c(x) :\Leftrightarrow \nexists y \in M : k(x, y)$
- (4) $d(y) :\Leftrightarrow \exists! x \in M : k(x, y)$

Eigene Lösung / Rechnung:

Die Reihenfolge der Quantoren

Vergleichen Sie

$$f : \Leftrightarrow \forall y \in M \exists x \in M : k(x, y)$$

und

$$g : \Leftrightarrow \exists x \in M \forall y \in M : k(x, y).$$

Formulieren Sie f und g in Worten. Welche Implikation gilt immer: $f \Rightarrow g$ oder $g \Rightarrow f$?

Eigene Lösung / Rechnung:

Campusbeispiel: Negieren

Negieren Sie ohne vorangestelltes „nicht“:

- (1) $\forall x \in M \forall y \in M : k(x, y)$
- (2) $\forall y \in M \exists x \in M : k(x, y)$
- (3) $\exists x \in M \forall y \in M : k(x, y)$

Eigene Lösung / Rechnung:

1.4 Vollständige Induktion

Motivation: Der kleine Gauß

Der Überlieferung nach sollte Carl Friedrich Gauß als Schüler die Zahlen von 1 bis 100 addieren. Statt alle Additionen nacheinander auszuführen, fasste er den ersten und den letzten Summanden zu Paaren zusammen:

$$\begin{aligned} S_{100} &= 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51). \end{aligned}$$

Jedes der 50 Paare hat die Summe 101. Daher gilt

$$S_{100} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Von der Beobachtung zur Vermutung

Für 100 Summanden haben wir $\frac{100}{2}$ Paare; jedes Paar ergibt $100 + 1$:

$$S_{100} = \frac{100}{2} (100 + 1).$$

Ersetzen wir gedanklich 100 durch n , legt das Beispiel die Vermutung nahe:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Rechnung mit 100 erklärt, **wie man auf die Formel kommt**. Sie beweist aber noch nicht, dass die Vermutung für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Genau das leistet die vollständige Induktion.

Viele mathematische Behauptungen bestehen aus unendlich vielen Einzelaussagen:

$$a(n_0), a(n_0 + 1), a(n_0 + 2), \dots$$

Die vollständige Induktion verbindet einen sicheren Start mit einem Schritt, der die Gültigkeit jeweils an die nächste natürliche Zahl weitergibt.

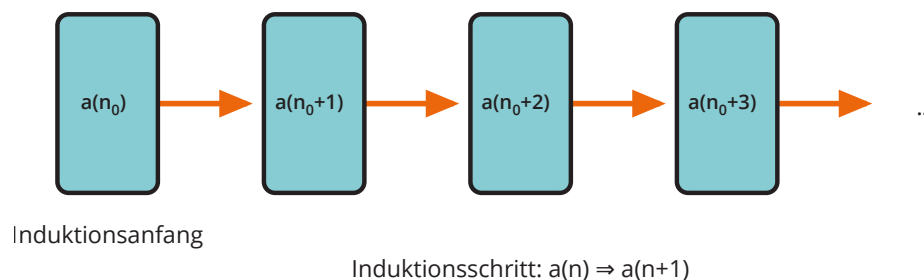


Abbildung 2: Domino-Modell der vollständigen Induktion: Der Induktionsanfang stößt den ersten Stein an, der Induktionsschritt überträgt die Aussage auf den nächsten Stein.

Satz 1.6 (Prinzip der vollständigen Induktion). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sei $a(n)$ eine Aussage. Gelten

- (1) **Induktionsanfang:** $a(n_0)$ ist wahr, und
- (2) **Induktionsschritt:** Für jedes feste $n \geq n_0$ gilt $a(n) \Rightarrow a(n + 1)$,

dann ist $a(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

Abbildung 2 veranschaulicht beide Voraussetzungen: Ohne den ersten fallenden Stein beginnt nichts; sobald ein Stein fällt, fällt auch der darauf folgende.

Das Beweisgerüst

Ein Induktionsbeweis wird immer sichtbar in drei Schritte (Induktionsanfang IA, Induktionsvoraussetzung IV, Induktionsschritt IS) gegliedert:

- (1) **IA:** Zeige $a(n_0)$.
- (2) **IV:** Nimm $a(n)$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq n_0$ an.
- (3) **IS:** Zeige unter Verwendung der IV die Aussage $a(n + 1)$.

Entwicklungsbeispiel: Gaußsche Summenformel

Wir wollen die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dabei bedeutet

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n.$$

Induktionsanfang und -voraussetzung

Formulieren Sie den Induktionsanfang für $n_0 = 1$ und anschließend die Induktionsvoraussetzung für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Induktionsschritt

Zeigen Sie die Behauptung für $n + 1$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Beispiel: geometrische Summe

Beweisen Sie für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Notieren Sie IA, IV und IS sowie explizit das Ziel des Induktionsschritts.

Tipp: Spalten Sie im Induktionsschritt den letzten Summanden q^{n+1} ab und bringen Sie beide Terme auf den Nenner $1 - q$.

Eigene Lösung / Rechnung: