

2 Mengen

Grundbegriffe, Mengenoperationen und kartesische Produkte

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

2.1 Grundbegriffe, Schreibweisen und wichtige Zahlenmengen	2
2.2 Gleichheit, Teilmengen und Mengenbeweise	5
2.3 Mengenoperationen und Rechengesetze	7
2.4 Mengenfamilien und kartesische Produkte	9

Wo begegnen uns Mengen?

Ein Hochschulsystem verwaltet beispielsweise

- die Menge aller Studierenden,
- die Menge aller bisher belegten Module eines Studierenden,
- die Menge aller Studierenden die eine bestimmtes Modul belegt haben und
- Paare der Form (*Studierende:r, belegtes Modul*).

Welche Operation liefert die Studierenden, die **Mathematik 1 und Programmierung 1** belegt haben? Welche liefert diejenigen, die mindestens eines der beiden Module belegt haben?

Eigene Lösung / Rechnung:

2.1 Grundbegriffe, Schreibweisen und wichtige Zahlenmengen

Definition 2.1 (Menge und Element). Eine **Menge** fasst bestimmte, voneinander unterscheidbare Objekte zu einem Ganzen zusammen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Für ein Objekt x und eine Menge M schreiben wir

$$x \in M \quad (x \text{ ist Element von } M)$$

falls x in der Menge M liegt, beziehungsweise

$$x \notin M \quad (x \text{ ist kein Element von } M)$$

falls x **nicht** in der Menge M liegt.

Eine Menge kann **aufzählend** oder **beschreibend** angegeben werden:

$$M = \{m_1, m_2, \dots\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \mid a(x)\}.$$

Im zweiten Fall enthält M genau diejenigen Objekte x , für die die Aussagefunktion $a(x)$ wahr ist.

Mächtigkeit und leere Menge

Definition 2.2 (Mächtigkeit). Besitzt eine Menge M endlich viele Elemente, so bezeichnet $|M|$ ihre **Mächtigkeit**, also die Anzahl ihrer Elemente. Die Menge ohne Elemente heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet; insbesondere ist $|\emptyset| = 0$.

Aufzählend oder beschreibend?

Schreiben Sie die folgenden Mengen jeweils in der anderen Darstellungsform.

- (1) $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- (2) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 30\}$
- (3) $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = -1\}$

Eigene Lösung / Rechnung:

Ein Paradoxon

Sei X die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten:

$$X = \{A \mid A \text{ ist eine Menge und } A \notin A\}.$$

Wir fragen uns: Gilt $X \in X$?

- Aus $X \in X$ folgt nach der Definition $X \notin X$.
- Aus $X \notin X$ folgt nach der Definition $X \in X$.

Beide Fälle führen zum **Widerspruch**!

Die moderne Mengenlehre schränkt deshalb ein, wie Mengen gebildet werden dürfen. In diesem Kurs arbeiten wir jeweils innerhalb einer passenden **Grundmenge** und bilden daraus Teilmengen. Dann kann ein solches Paradoxon nicht eintreten.

Die Zahlenbereiche

Symbol	Bedeutung	Beispiele
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen; hier $\{1, 2, 3, \dots\}$	1, 7, 42
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	0, 5, 19
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	-3, 0, 8
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$	$-\frac{2}{5}$, 7
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\sqrt{2}$, π , -4
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$	$2 - 3i$

Wie hängen die Zahlenbereiche zusammen?

Es gilt die Inklusionskette

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Definition 2.3 (Intervalle). Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Unbeschränkte Intervalle schreibt man beispielsweise als

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Welche Randpunkte gehören dazu?

Übersetzen Sie (wenn möglich) zwischen beschreibender Form und Intervallschreibweise.

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\}$
- (2) $[2, \infty)$
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$
- (4) $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

Eigene Lösung / Rechnung:

2.2 Gleichheit, Teilmengen und Mengenbeweise

Definition 2.4 (Gleichheit und Teilmenge). Seien A und B Mengen.

- **Gleichheit:** $A = B$, falls für jedes x gilt $x \in A \iff x \in B$.
- **Teilmenge:** $A \subseteq B$, falls für jedes x gilt $x \in A \implies x \in B$.
- **Echte Teilmenge:** $A \subsetneq B$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Element, Teilmenge oder weder noch?

Für $M = \{1, \{1\}, 2\}$: Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr sind.

- (1) $1 \in M$
- (2) $\{1\} \in M$
- (3) $\{1\} \subseteq M$
- (4) $\{2\} \subseteq M$
- (5) $\{\{1\}, 2\} \subsetneq M$
- (6) $\emptyset \in M$

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 2.1 (Beidseitige Inklusion). Für beliebige Mengen A und B gilt

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Zum Beweis einer Gleichheit zeigt man daher nacheinander beide Inklusionen:

- (1) Wähle ein beliebiges $x \in A$ und zeige $x \in B$.
- (2) Wähle ein beliebiges $x \in B$ und zeige $x \in A$.

Gleichheit durch zwei Inklusionen

Es seien

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}, \quad B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie $A = B$. Formulieren Sie beide Inklusionen ausdrücklich.

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 2.5 (Potenzmenge). Die **Potenzmenge** einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A :

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es?

Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ und $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$. Was fällt bei der Anzahl der Teilmengen einer Menge mit n Elementen auf?

Eigene Lösung / Rechnung:

2.3 Mengenoperationen und Rechengesetze

Definition 2.6 (Mengenoperationen). Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge E .

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}, & \text{Durchschnitt,} \\ A \cup B &:= \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}, & \text{Vereinigung,} \\ A \setminus B &:= \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\}, & \text{Differenz,} \\ \overline{A} &:= E \setminus A, & \text{Komplement von } A \text{ in } E. \end{aligned}$$

Vier Operationen – vier Bereiche

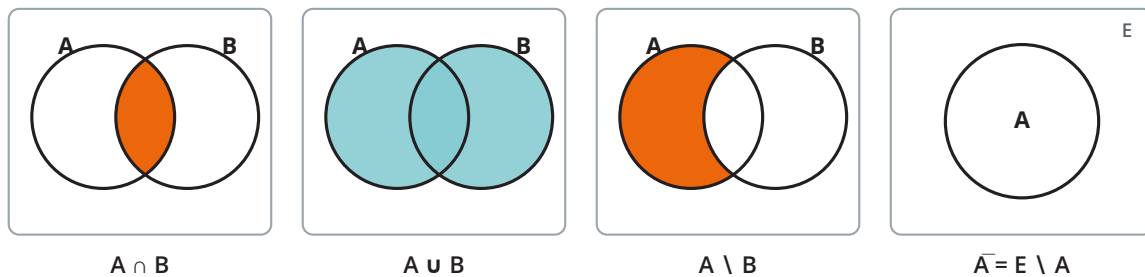


Abbildung 1: Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Komplement als Venn-Diagramme.

Mengenoperationen berechnen

Für

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{2, 3\}$$

bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $C \setminus A$ und die passende Beziehung zwischen C und A .

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 2.2 (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze). Für beliebige Teilmengen $A, B, C \subseteq E$ gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A, \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Satz 2.3 (Komplement- und De-Morgan-Gesetze). Für $A, B \subseteq E$ gilt

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cap E &= A, \\ A \cup \overline{A} &= E, & A \cap \overline{A} &= \emptyset, \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned}$$

Außerdem gelten die De-Morgan-Gesetze

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (2.1)$$

Gleichung 2.1 zeigt: Beim Komplementieren werden Vereinigung und Durchschnitt vertauscht.

Eine Mengenidentität beweisen

Zeigen Sie für beliebige Mengen A und B :

$$B \setminus (B \setminus A) = A \cap B.$$

Nutzen Sie die Strategie der beidseitigen Inklusion.

Eigene Lösung / Rechnung:

2.4 Mengenfamilien und kartesische Produkte

Definition 2.7 (Vereinigung und Durchschnitt einer Mengenfamilie). Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine durch die Indexmenge I bezeichnete Mengenfamilie. Dann definieren wir

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i\}.$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir entsprechend

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

Mindestens eine oder jede Menge?

Es seien

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{2, 3, 4\}, \quad A_3 = \{3, 4, 5\}.$$

Geben Sie $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ und $\bigcap_{i=1}^3 A_i$ in aufzählender Schreibweise an. Formulieren Sie jeweils die passende Bedingung an ein Element x in $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ (bzw. $\bigcap_{i=1}^3 A_i$) indem Sie den Satz ergänzen:

Das Element x liegt genau dann in ... wenn

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 2.8 (Geordnetes Paar und kartesisches Produkt). Für $a \in A$ und $b \in B$ heißt (a, b) ein **geordnetes Paar**. Es gilt

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'.$$

Das **kartesische Produkt** von A und B ist

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Im Allgemeinen ist $(a, b) \neq (b, a)$ und damit auch $A \times B \neq B \times A$.

Alle geordneten Paare finden

Für $A = \{2, 4\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$:

- (1) Geben Sie $A \times B$ und $B \times A$ an.
- (2) Vergleichen Sie die beiden Produkte und ihre Mächtigkeiten.

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 2.9 (Kartesisches Produkt für mehr als zwei Mengen). Für Mengen $A_1, \dots, A_n$ ist

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}.$$

Sind alle Mengen endlich, so gilt

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|. \quad (2.2)$$

Die Produktregel Gleichung 2.2 folgt daraus, dass für jede Komponente eines Tupels unabhängig eines der Elemente aus der zugehörigen Menge gewählt wird.

Wie viele Zugangscodes sind möglich?

Ein Code besteht aus zwei Großbuchstaben aus $\{A, \dots, Z\}$ und anschließend drei Ziffern aus $\{0, \dots, 9\}$. Wiederholungen sind erlaubt.

- (1) Beschreiben Sie die Menge aller Codes als kartesisches Produkt.
- (2) Bestimmen Sie ihre Mächtigkeit.

Eigene Lösung / Rechnung: