

3 Reelle Zahlen und Rechentechniken

Potenzen, Ungleichungen, Schranken und Summen

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

3.1	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	2
3.2	Betrag, Abstand und Ordnungsstruktur	4
3.3	Ungleichungen	6
3.4	Schranken, Infimum und Supremum	8
3.5	Fakultät, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck	9
3.6	Summen, Produkte und binomischer Lehrsatz	12

Zahlen als Werkzeug der Informatik

Welche mathematischen Werkzeuge stecken hinter diesen drei Fragen?

- Wie viele Bit werden benötigt, um 10^6 verschiedene Zustände zu codieren?
- Welche Eingaben erfüllen eine vorgegebene Speicher- oder Laufzeitgrenze?
- Wie viele Operationen führt eine verschachtelte Schleife insgesamt aus?

Wir benötigen **Potenzen und Logarithmen, Ungleichungen** sowie **Summen und kombinatorische Größen**.

Eigene Lösung / Rechnung:

3.1 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Definition 3.1 (Potenzen und Wurzeln). Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ und $a^0 = 1$,
- $\sqrt[n]{a}$ ist die nichtnegative Zahl b mit $b^n = a$,
- $a^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[m]{a})^n$ und
- $a^{-x} := \frac{1}{a^x}$.

Falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wird die Potenz a^x mithilfe rationaler Approximationen von x als Grenzwert definiert. Später mehr dazu.

Satz 3.1 (Potenzgesetze). Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$a^x b^x = (ab)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x,$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Welche Regel passt?

Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner:

(1) $\frac{2^{n+3}}{2^n}$

(2) $(\sqrt[3]{x})^6$ für $x > 0$

(3) $\frac{4^{-2} \cdot 4^5}{4}$

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 3.2 (Logarithmus). Für $b > 0, b \neq 1$ und $a > 0$ ist

$$x = \log_b(a) \iff b^x = a.$$

Man sagt: „ x ist der Logarithmus von a zur Basis b .“

Ist die Basis b gleich der Eulerschen Zahl e , so schreibt man $\ln(a) := \log_e(a)$.

Die Eulersche Zahl wird durch den Grenzwert

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

definiert. Es gilt $e \approx 2,718282$ und $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Satz 3.2 (Logarithmengesetze). Für $b, c > 0$ mit $b, c \neq 1$ und $x, y > 0$ gilt

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y),$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y),$$

$$\log_b(x^a) = a \log_b(x),$$

$$\log_c(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(c)}.$$

Aus den Potenz- und Logarithmengesetzen folgt:

$$b^{\log_b(x)} = x \quad \text{und} \quad \log_b(b^x) = x.$$

Binäre Suche

Eine binäre Suche halbiert einen Suchbereich mit 1 000 000 Einträgen in jedem Schritt. Wie viele Halbierungen genügen im ungünstigsten Fall?

Eigene Lösung / Rechnung:

3.2 Betrag, Abstand und Ordnungsstruktur

Definition 3.3 (Betrag und Vorzeichen). Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Der Abstand zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a - b|$. Insbesondere ist $|a| = |a - 0|$ der Abstand von a zum Ursprung.

Welche Zahlen liegen nahe genug?

Ein Sensorwert x darf höchstens 0,25 vom Sollwert 5 abweichen.

- (1) Formulieren Sie die Bedingung mit einem Betrag.
- (2) Geben Sie den zulässigen Wertebereich als Intervall an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Definition 3.4 (Abrunden und Aufrunden). Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

die größte ganze Zahl, die höchstens x ist, und

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$$

die kleinste ganze Zahl, die mindestens x ist.

Die Zeichen $\lfloor \cdot \rfloor$ und $\lceil \cdot \rceil$ heißen **Gaußklammern**.

Definition 3.5 (Teilbarkeit, ggT und kgV). Für $a, b \in \mathbb{Z}$ bedeutet

$$a \mid b \iff \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } ak = b.$$

Für nicht gleichzeitig verschwindende ganze Zahlen a, b ist

$$\text{ggT}(a, b) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid a \wedge n \mid b\}.$$

Für $a, b \neq 0$ ist

$$\text{kgV}(a, b) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \mid n \wedge b \mid n\}.$$

Es gilt

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = |a \cdot b|.$$

Wann treffen zwei Takte zusammen?

Zwei Hintergrundprozesse starten gleichzeitig. Der erste läuft alle 18 Sekunden, der zweite alle 24 Sekunden.

- (1) Nach wie vielen Sekunden laufen beide wieder gleichzeitig?
- (2) Welche Rolle spielen $\text{ggT}(18, 24)$ und $\text{kgV}(18, 24)$?

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 3.3 (Dreiecks- und Mittelwertungleichung). Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|. \quad (3.1)$$

Sind zusätzlich alle $a_i \geq 0$, so gilt

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}.$$

Gleichung 3.1 besagt insbesondere, dass ein direkter Weg nie länger als ein Weg über Zwischenstationen ist.

3.3 Ungleichungen

Satz 3.4 (Regeln für Ungleichungen). Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
- $a < b \iff a + c < b + c$.
- Für $c > 0$ gilt $a < b \iff ac < bc$.
- Für $c < 0$ gilt $a < b \iff ac > bc$.
- Für $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a < b \iff a^n < b^n$.

Alle Aussagen gelten entsprechend mit $\leq$ statt $<$.

Welche Umformung ist zulässig?

Gegeben sei $-2x < 6$. Welche Umformung ist korrekt?

- (1) $x < -3$
- (2) $x > -3$

Begründen Sie die Richtung des Ungleichheitszeichens.

Eigene Lösung / Rechnung:

Betragsungleichung mit Fallunterscheidung

Lösen Sie $|x - 1| < 3 + \frac{1}{2}x$ durch eine Fallunterscheidung an der kritischen Stelle $x = 1$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Ungleichungen mit quadratischen Funktionen

Lösen Sie $x^2 + 3x < 10$.

Tipp: Verwenden Sie quadratische Ergänzung und eine binomische Formel

Eigene Lösung / Rechnung:

Eine gefährliche Multiplikation

Lösen Sie $\frac{x}{x+1} < 1$. Warum darf nicht sofort mit $x + 1$ multipliziert werden?

Eigene Lösung / Rechnung:

3.4 Schranken, Infimum und Supremum

Definition 3.6 (Maximum und Minimum). Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

- Ein Element $x_{\max} \in M$ heißt **Maximum** von M , wenn $x \leq x_{\max}$ für alle $x \in M$ gilt.
- Ein Element $x_{\min} \in M$ heißt **Minimum** von M , wenn $x_{\min} \leq x$ für alle $x \in M$ gilt.

Beispiel (Maximum und Minimum). Für $A = (-1, 3]$ gilt:

- $\max A = 3$.
- $\min A$ existiert nicht.

Definition 3.7 (Schranken, Supremum und Infimum). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von M , wenn $x \leq s$ für alle $x \in M$ gilt. Existiert eine obere Schranke, heißt M **nach oben beschränkt**.
- Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt **untere Schranke** von M , wenn $t \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Existiert eine untere Schranke, heißt M **nach unten beschränkt**.
- Die kleinste obere Schranke von M heißt **Supremum** $\sup M$; die größte untere Schranke heißt **Infimum** $\inf M$.
- Eine nach oben und nach unten beschränkte Menge heißt **beschränkt**.

Satz 3.5 (Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen). Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.

Es gilt

$$\sup M \in M \implies \sup M = \max M.$$

$$\inf M \in M \implies \inf M = \min M.$$

Liegen also $\sup M$ bzw. $\inf M$ in der Menge M , so sind sie **gleich** $\max M$ bzw. $\min M$.

Schranke oder erreichter Wert?

Gegeben ist

$$M = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ und $\min M$.

Eigene Lösung / Rechnung:

3.5 Fakultät, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck

Beispiel: n Elemente anordnen

Beispiel. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Elemente in einer Reihe anzuordnen?

- Für den ersten Platz stehen n Elemente zur Auswahl.
- Danach bleiben für den zweiten Platz $n - 1$ Elemente, für den dritten $n - 2$ Elemente und so weiter.
- Nach dem Multiplikationsprinzip gibt es insgesamt

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

verschiedene Anordnungen. Für $n = 4$ sind das $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.

Dieses Produkt erhält in der folgenden Definition die Kurzschreibweise $n!$.

Beispiel: k aus n Elementen auswählen

Beispiel. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen genau k auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?

- Mit Reihenfolge gibt es

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$$

Möglichkeiten.

- Jede Auswahl derselben k Elemente wurde dabei $k!$ -mal gezählt, einmal für jede ihrer möglichen Reihenfolgen.
- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge bleiben daher

$$\frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Auswahlen. Für $n = 5$ und $k = 2$ sind es beispielsweise $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$.

Diese Anzahl wird durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

Definition 3.8 (Fakultät und Binomialkoeffizient). Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n! := n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! := 1.$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ gilt insbesondere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Satz 3.6 (Regeln für Binomialkoeffizienten). Für passende n, k und α gilt

$$n! = n(n-1)!,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k} \binom{\alpha-1}{k-1} \quad (k \geq 1),$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pascalsches Dreieck

Die Additionsregel erzeugt jede innere Zahl aus den beiden darüberliegenden:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Die Zeile n enthält $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

Zugriffsteams zusammenstellen

Ein Projektteam besteht aus 8 Personen. Für ein Code-Review werden genau 3 Personen ausgewählt.

(1) Wie viele Teams sind möglich?

(2) Wie viele davon enthalten eine fest vorgegebene Person?

(3) Begründen Sie die verwendeten Binomialkoeffizienten.

Eigene Lösung / Rechnung:

3.6 Summen, Produkte und binomischer Lehrsatz

Definition 3.9 (Summen- und Produktzeichen). Für Zahlen $a_1, \dots, a_n$ ist

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

und

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Satz 3.7 (Rechenregeln für Summen und Produkte). Es gilt

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k,$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk},$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right),$$

$$\prod_{k=1}^n (c a_k) = c^n \prod_{k=1}^n a_k, \quad \prod_{k=1}^n k = n!.$$

Vom Programm zur Summe

Betrachten Sie den Pseudocode:

```
summe = 0
for j = 1,...,m:
    for k = 1,...,n:
        summe = summe + a[j,k]
```

1. Beschreiben Sie das Ergebnis mit Summenzeichen.

2. Wie viele Summanden werden aufaddiert beziehungsweise wie oft wird die Addition ausgeführt?
3. Darf die Reihenfolge der beiden Schleifen vertauscht werden?

Eigene Lösung / Rechnung:

Satz 3.8 (Binomischer Lehrsatz). Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (3.2)$$

Der kompakte Ausdruck Gleichung 3.2 enthält $n + 1$ Summanden. Die Koeffizienten stehen in Zeile n des Pascalschen Dreiecks.

Vorzeichen beim Ausmultiplizieren

Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, um $(1 - x)^5$ auszumultiplizieren. Woher kommt das wechselnde Vorzeichen?

Eigene Lösung / Rechnung: