

5 Komplexe Zahlen

Zahlenebene, Darstellungsformen und Gleichungen

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

5.1	Definition und komplexe Zahlenebene	2
	Gewohnte Rechenregeln weiterverwenden	3
	Die Gaußsche Zahlenebene	5
5.2	Betrag, Argument und komplexe Konjugation	6
	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	7
	Der Winkel einer komplexen Zahl	7
5.3	Darstellungsformen	10
	Algebraische Darstellung	10
	Trigonometrische Darstellung	10
	Exponentielle Darstellung	10
	Drei Darstellungen im Überblick	14
5.4	Rechnen mit komplexen Zahlen	14
	Addition: Komponenten addieren	14
	Subtraktion: Die Gegenzahl addieren	14
	Multiplikation: Algebraisch ausmultiplizieren	15
	Multiplikation: Beträge und Winkel	16
	Division: Einen reellen Nenner erzeugen	16
	Division: Beträge und Winkel	17
	Potenzieren: Polarform verwenden	17
	Wurzeln: Betrag und Winkel aufteilen	18
5.5	Gleichungen und Polynomzerlegungen	21
	Polynome und ihre Nullstellen	22
	Nullstellen und Linearfaktoren	22
	Von komplexen zu reellen Faktoren	23

Warum erweitern wir Zahlenbereiche?

Neue Zahlen ermöglichen Lösungen bisher unlösbarer Gleichungen.

Erweiterung	Bisher unlösbar	Neue Lösung(en)
$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$	$4 + x = 2$	$x = -2$
$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$	$6x = 3$	$x = \frac{1}{2}$
$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$	$x^2 = 2$	$x = \pm\sqrt{2}$

Auch in $\mathbb{R}$ bleiben Gleichungen unlösbar:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Wie erweitern wir den Zahlenbereich, um auch diese Gleichung zu lösen?

Eigene Lösung / Rechnung:

5.1 Definition und komplexe Zahlenebene

Definition 5.1 (Komplexe Zahl). Die **komplexen Zahlen** sind die Zahlen der Form

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dabei heißt i mit $i^2 = -1$ **imaginäre Einheit**. Für $z = x + yi$ heißen

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

Realteil und **Imaginärteil** von z . Die Schreibweise $x + yi$ heißt **algebraische Darstellung**.

Zwei reelle Koordinaten

Bemerkung: Gleichheit und reelle Zahlen.

- $x_1 + y_1i = x_2 + y_2i$ gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.
- Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $x + 0i$; damit gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Eine Zahl ist reell genau dann, wenn ihr Imaginärteil null ist.
- Der Imaginärteil ist eine **reelle Zahl**: Für $z = 2 - 3i$ gilt $\text{Im}(z) = -3$, nicht $-3i$.

Addition und Multiplikation

Definition 5.2 (Addition und Multiplikation). Für $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$ setzen wir

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \end{aligned}$$

Die Formel zur Multiplikation folgt mit dem formalen Ausmultiplizieren der beiden Faktoren und dem Ersetzen von i^2 durch -1 .

Die Ausgangsgleichung ist lösbar

Erfüllt $x = i = 0 + 1i$ die Gleichung $x^2 + 1 = 0$? Prüfen wir das mit der definierten Multiplikation und Addition.

Eigene Lösung / Rechnung:

Gewohnte Rechenregeln weiterverwenden

Rechengesetze

Bemerkung: Rechengesetze. Für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ gelten:

Kommutativgesetz — die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren darf vertauscht werden:

$$u + v = v + u, \quad uv = vu.$$

Assoziativgesetze — bei gleicher Rechenart darf umgeklammert werden:

$$(u + v) + w = u + (v + w), \quad (uv)w = u(vw).$$

Distributivgesetze — Multiplikation verteilt sich über Addition:

$$u(v + w) = uv + uw, \quad (u + v)w = uw + vw.$$

Subtraktion

Bemerkung: Gegenzahl und Subtraktion. Zu $z = x + yi$ gehört die **Gegenzahl**

$$-z = -x - yi, \quad z + (-z) = 0.$$

Wir definieren die Subtraktion, indem wir die Gegenzahl addieren:

$$u - v := u + (-v).$$

In algebraischer Form bedeutet dies

$$(x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Die **Division** wird später erklärt.

Binomischen Formeln

Bemerkung: Binomische Formeln. Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (u + v)^2 &= u^2 + 2uv + v^2, \\ (u - v)^2 &= u^2 - 2uv + v^2, \\ (u + v)(u - v) &= u^2 - v^2. \end{aligned}$$

Beim Rechnen mit der imaginären Einheit ist dabei stets $i^2 = -1$ zu berücksichtigen.

Ein Quadrat ausmultiplizieren

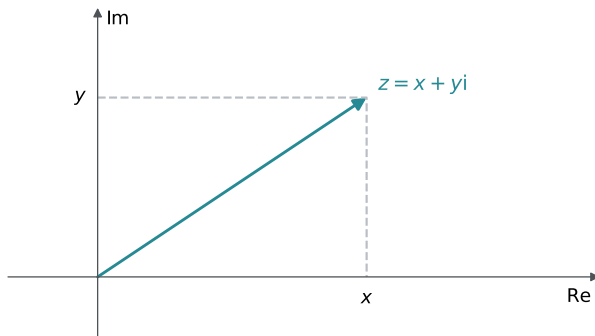
Berechnen Sie $(1 + i)^2$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Die Gaußsche Zahlenebene

Darstellung als Punkt

Bemerkung: Zahl, Punkt und Pfeil. Die Zahl $z = x + yi$ entspricht dem Punkt (x, y) und dem Pfeil vom Ursprung zu diesem Punkt. Die waagerechte Achse ist die **reelle Achse**, die senkrechte die **imaginäre Achse**.



Die vier Quadranten

Bemerkung: Quadranten. Die beiden Achsen teilen die Ebene in vier Bereiche. Wir nummerieren sie gegen den Uhrzeigersinn, beginnend oben rechts.

Quadrant	Lage	Realteil x	Imaginärteil y
I	oben rechts	> 0	> 0
II	oben links	< 0	> 0
III	unten links	< 0	< 0
IV	unten rechts	> 0	< 0

Punkte auf den Achsen gehören zu keinem Quadranten.

Zahlen in der Ebene erkennen

Beispiel: Punkte und Koordinaten

Tragen Sie $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$, $z_3 = -2i$ und $z_4 = 3$ in eine Skizze ein. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.

Eigene Lösung / Rechnung:

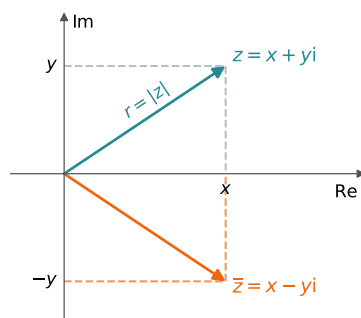
5.2 Betrag, Argument und komplexe Konjugation

Definition 5.3 (Betrag und Konjugation). Für $z = x + yi$ heißen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\bar{z} = x - yi$$

der **Betrag** von z und die zu z **konjugiert komplexe Zahl**. Geometrisch ist $|z|$ der Abstand zum Ursprung und $\bar{z}$ die Spiegelung von z an der reellen Achse.



Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl

Bemerkung: Konjugation und Betrag. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|,$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

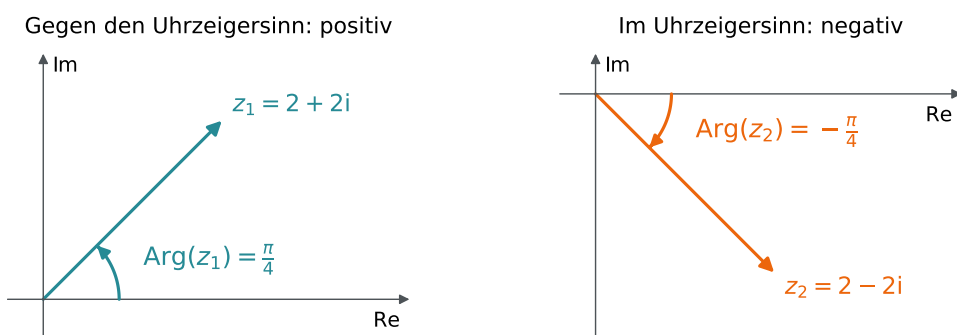
Außerdem ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $z = \bar{z}$.

Begründen Sie $z\bar{z} = |z|^2$ für $z = x + yi$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Der Winkel einer komplexen Zahl

Definition 5.4 (Argument und Hauptargument). Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. Ein **Argument** von z ist ein Winkel φ welcher den Pfeil von 0 nach z mit der positiven reellen Achse einschließt. Das **Hauptargument** $\text{Arg}(z)$ ist das eindeutig bestimmte Argument im Intervall $(-\pi, \pi]$.



Bemerkung: Eindeutigkeit des Hauptarguments.

- Das Hauptargument $\text{Arg}(z)$ ist eindeutig bestimmt, da es auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ beschränkt ist.
- Das Argument ist nicht eindeutig bestimmt, da man beliebig viele volle Umdrehungen hinzufügen kann. Genauer gesagt ist

$$\varphi = \text{Arg}(z) + 2k\pi$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Argument von z .

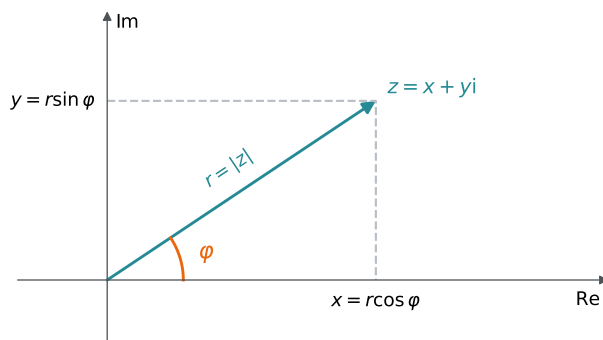
- Argumente werden (typischerweise) in Bogenmaß angegeben, also in Vielfachen von π . Ein voller Kreis entspricht 2π , ein halber Kreis π (also 180°).

Winkel und Koordinaten verbinden

Erinnerung: Sinus und Kosinus. Der **Einheitskreis** ist der Kreis um den Ursprung mit Radius 1. Sein Punkt zum Winkel φ hat die Koordinaten $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Für den Radius $r > 0$ werden beide Koordinaten mit r multipliziert:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$



Das Hauptargument berechnen

Bemerkung: Berechnung aus den Koordinaten. Für $-1 \leq t \leq 1$ ist $\arccos(t)$ der eindeutige Winkel in $[0, \pi]$, dessen Kosinus t ist.

Aus $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ folgt für $z = x + yi \neq 0$ und $r = |z|$:

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0. \end{cases}$$

Das Vorzeichen von y entscheidet, ob der Pfeil oberhalb oder unterhalb der reellen Achse liegt.

Für $r = 0$, also $z = 0$, ist diese Formel nicht anwendbar; für die Zahl null ist kein Argument definiert.

Betrag und Winkel berechnen

Beispiel: Zwei Zahlen, zwei Quadranten

Bestimmen Sie Betrag, Hauptargument und konjugiert komplexe Zahl von $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -12 - 5i$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Achsen und Hauptargument

Bestimmen Sie die Hauptargumente von -2 , $-2i$ und 0 . Ist $\frac{7\pi}{4}$ das Hauptargument von $1 - i$?

Eigene Lösung / Rechnung:

Koordinaten eindeutig umrechnen

Satz 5.1 (Eindeutige Koordinatenumrechnung). Zwischen reellen Paaren $(x, y) \neq (0, 0)$ und Paaren (r, φ) mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ besteht eine eindeutige Zuordnung.

Von x, y zu r, φ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0. \end{cases}$$

Von r, φ zu x, y :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Beide Umrechnungen sind zueinander invers.

Für $r = 0$ gilt $x = y = 0$; ein Hauptargument ist dann nicht definiert.

5.3 Darstellungsformen

Algebraische Darstellung

Die bereits bekannte Form

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

heißt **algebraische Darstellung**. Dabei sind $x = \operatorname{Re}(z)$ der Realteil und $y = \operatorname{Im}(z)$ der Imaginärteil.

Trigonometrische Darstellung

Definition 5.5 (Trigonometrische Darstellung). Für $z \neq 0$, $r = |z|$ und ein Argument φ von z heißt

$$z = r(\cos \varphi + i \sin(\varphi))$$

die **trigonometrische Darstellung** oder **Polarform** von z . Dabei ist $r > 0$ der **Radius** bzw. **Betrag** und φ ein **Winkel** bzw. **Argument** der komplexen Zahl.

Exponentielle Darstellung

Satz 5.2 (Eulersche Formel). Für jeden Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß gilt

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin(\varphi).$$

Die Zahl $e^{i\varphi}$ hat den Betrag 1 und das Argument φ . Sie entspricht dem Punkt $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ auf dem Einheitskreis.

Exponentielle Darstellung einer komplexen Zahl

Definition 5.6 (Exponentielle Darstellung). Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$, $r = |z| > 0$ und ein Argument φ von z heißt

$$z = re^{i\varphi}$$

die **exponentielle Darstellung** von z . Dabei ist r der **Radius** bzw. **Betrag** und φ der **Winkel** bzw. ein **Argument** von z . Die Zahl $e^{i\varphi}$ ist der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreis.

Taylorreihe der reellen Exponentialfunktion

Bemerkung: Taylorreihe von e^x . Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Die rechte Seite heißt **Taylorreihe von e^x um 0**. Dabei ist $k!$ die Fakultät und $0! = 1$.

Eine **Reihe** ist eine unendliche Summe; ihr Wert ist der Grenzwert der endlichen Teilsummen. Die Herleitung dieser Taylorreihe und die systematische Behandlung von Reihen folgen im **zweiten Semester**.

Weiterführende Lektüre: G. und S. Teschl, *Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik*, 3. Aufl., Springer Vieweg, 2014, Abschnitt 20.1 „Taylorreihen“, S. 83–89: Taylorpolynome, Fehlerabschätzung, Konvergenz und Beispiele, darunter e^x .

Komplexe Exponentialfunktion

Definition 5.7 (Komplexe Exponentialfunktion). Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ und stimmt für reelles $z = x$ mit dem bekannten e^x überein.

Insbesondere erhalten wir für $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}.$$

Der komplexe Exponent wird also über diese Summe ausgewertet.

Weiterführende Lektüre: K. Königsberger, *Analysis 1*, 6. Aufl., Springer, 2004, Abschnitt 8.1, S. 103–106 (Reihendarstellung und Funktionalgleichung), sowie Abschnitt 8.10, S. 125–128 (Geometrie der komplexen Exponentialabbildung und komplexer Logarithmus).

Rechenregeln

Bemerkung: Potenzgesetze für die Basis e . Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad \frac{e^z}{e^w} = e^{z-w},$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad (e^z)^n = e^{nz}, \quad e^0 = 1.$$

Dabei ist $e^z \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Für reelle Winkel α, β folgt insbesondere

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Beim Multiplizieren dieser Punkte auf dem Einheitskreis werden also die Winkel addiert.

Ein allgemeiner komplexer Exponent

Bemerkung: Die Bedeutung von e^{a+bi} . Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + \sin(b) i).$$

- Der **Realteil a des Exponenten** bestimmt den Betrag e^a .
- Der **Imaginärteil b des Exponenten** ist ein Argument des Ergebnisses im Bogenmaß.
- Für $b = 0$ erhalten wir die bekannte positive reelle Zahl e^a .
- Für $a = 0$ ist der Betrag 1: Der Punkt liegt auf dem Einheitskreis.

Vier Winkel auf dem Einheitskreis

Beispiel: Wo liegt $e^{i\varphi}$?

Bestimmen Sie $e^{i\varphi}$ für $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$. Nutzen Sie Sinus und Kosinus und zeichnen Sie die zugehörigen Punkte auf dem Einheitskreis.

Eigene Lösung / Rechnung:

Winkel sind nicht eindeutig

Bemerkung: Gleiche Zahl, verschiedene Winkel.

- $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
- Bei positivem Betrag beschreiben zwei Polarformen dieselbe Zahl genau dann, wenn ihre Beträge gleich sind und sich ihre Winkel um $2k\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) unterscheiden.
- $0 = 0 \cdot e^{i\varphi}$ gilt für jeden Winkel; der Null wird dadurch kein Argument zugeordnet.
- Exponenten $i\varphi$ verwenden Winkel im Bogenmaß, z.B. 180° entspricht π .

Von algebraisch zu exponentiell

Beispiel: Darstellungen wechseln

Schreiben Sie $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -12 - 5i$ trigonometrisch und exponentiell. Nutzen Sie die bereits berechneten Beträge und Hauptargumente.

Eigene Lösung / Rechnung:

Von exponentiell zu algebraisch

Beispiel: Koordinaten zurückgewinnen

Bestimmen Sie die algebraische Form von $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Geben Sie den zugehörigen Punkt und seinen Quadranten an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Drei Darstellungen im Überblick

Für dieselbe komplexe Zahl $z \neq 0$ stehen nun drei Darstellungen zur Verfügung:

Darstellung	Schreibweise
algebraisch	$z = x + yi$
trigonometrisch	$z = r(\cos \varphi + \sin(\varphi) i)$
exponentiell	$z = re^{i\varphi}$

Dabei ist $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ der **Radius** bzw. **Betrag** und φ ein **Winkel** bzw. **Argument** von z . Es gelten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$.

Wählen wir $\varphi = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, sind auch r und φ eindeutig bestimmt.

5.4 Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition: Komponenten addieren

Bemerkung: Addition. Für $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ gilt

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Geometrisch werden die zugehörigen Pfeile aneinandergehängt. Liegen die Zahlen in Polarform vor, rechnen wir zunächst mit $x_j = r_j \cos \varphi_j$ und $y_j = r_j \sin \varphi_j$ in die algebraische Form um.

Subtraktion: Die Gegenzahl addieren

Bemerkung: Subtraktion. Für $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ ist $-z_2 = -x_2 - y_2 i$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i. \end{aligned}$$

Wir subtrahieren also Realteil von Realteil und Imaginärteil von Imaginärteil. Geometrisch addieren wir den entgegengesetzten Pfeil zu z_2 .

Addieren und subtrahieren

Beispiel: Rechnen mit zwei komplexen Zahlen

Gegeben sind $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -12 - 5i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Multiplikation: Algebraisch ausmultiplizieren

Bemerkung: Algebraische Multiplikation. Für $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$ gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \end{aligned}$$

Das Ergebnis liegt wieder in algebraischer Form vor.

Ein Produkt ausmultiplizieren

Beispiel (Fortsetzung): Das Produkt

Berechnen Sie $z_1 z_2$ für $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -12 - 5i$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Multiplikation: Beträge und Winkel

Bemerkung: Multiplikation in Polarform. Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ mit $r_1, r_2 > 0$ gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Beträge multiplizieren, Winkel addieren. Die Multiplikation mit z_2 multipliziert den Betrag mit r_2 und dreht um den Winkel φ_2 .

Für das Hauptargument wird der Winkel gegebenenfalls um ein Vielfaches von 2π in $(-\pi, \pi]$ verschoben. Ist einer der Faktoren null, ist das Produkt null.

Multiplikation als Drehung

Beispiel: Mit i multiplizieren

Berechnen Sie $i(2 + i)$. Beschreiben Sie die Wirkung der Multiplikation mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ geometrisch.

Eigene Lösung / Rechnung:

Division: Einen reellen Nenner erzeugen

Bemerkung: Kehrwert und Division. Für $w \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}, \quad \frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

In algebraischer Form, für $w = u + vi \neq 0$, ergibt sich

$$\frac{x + yi}{u + vi} = \frac{x + yi}{u + vi} \cdot \frac{u - vi}{u - vi} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} i.$$

Mit dem konjugierten Nenner erweitern, ausmultiplizieren und Real- und Imaginärteil zusammenfassen. Division durch null ist nicht definiert.

Division Schritt für Schritt

Beispiel (Fortsetzung): Der Quotient

Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$ in algebraischer Form.

Eigene Lösung / Rechnung:

Division: Beträge und Winkel

Bemerkung: Division in Polarform. Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ mit $r_1, r_2 > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) i). \end{aligned}$$

Beträge dividieren, Winkel subtrahieren. Für das Hauptargument wird der Winkel gegebenenfalls in $(-\pi, \pi]$ verschoben.

Für $z_1 = 0$ und $z_2 \neq 0$ ist der Quotient 0; dann wird kein Winkel benötigt. Der Nenner darf nie null sein.

Potenzieren: Polarform verwenden

Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ bedeutet z^n das Produkt aus n gleichen Faktoren z . Für $z \neq 0$ setzen wir außerdem $z^0 = 1$ und $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

Satz 5.3 (Formel von de Moivre). Für $z = r e^{i\varphi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) i).$$

Eine zwölfte Potenz ohne Ausmultiplizieren

Beispiel: $(-1 + i)^{12}$

Berechnen Sie $(-1 + i)^{12}$ mithilfe der Polarform. Geben Sie das Ergebnis algebraisch an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Wurzeln: Betrag und Winkel aufteilen

Wurzelziehen bedeutet hier, **alle Lösungen von** $z^n = b$ zu bestimmen. Für $b = 0$ ist $z = 0$ die einzige Lösung. Für $b \neq 0$ verwenden wir die Polarform:

Satz 5.4 (Lösungen der Wurzelgleichung). Seien $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $\beta = \text{Arg}(b)$. Dann besitzt $z^n = b$ genau n verschiedene komplexe Lösungen:

$$z_k = \sqrt[n]{|b|} e^{i \frac{\beta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.1)$$

$\sqrt[n]{|b|}$ bezeichnet die positive reelle Wurzel. Die Lösungen von $z^n = 1$ heißen **n -te Einheitswurzeln**.

Die Lösungen liegen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|b|}$ und haben den Winkelabstand $\frac{2\pi}{n}$.

Warum genau n Lösungen?

Setzen Sie $z = re^{i\varphi}$ und $b = |b|e^{i\beta} \neq 0$. Welche Bedingungen müssen r und φ erfüllen, damit $z^n = b$ gilt?

Eigene Lösung / Rechnung:

Dritte Einheitswurzeln

Beispiel: $z^3 = 1$

Bestimmen Sie alle Lösungen exponentiell und algebraisch.

Eigene Lösung / Rechnung:

Eine negative rechte Seite

Beispiel: $z^4 = -16$

Bestimmen Sie zunächst die Beträge und Winkel aller Lösungen.

Eigene Lösung / Rechnung:

Die vier Lösungen algebraisch

Beispiel (Fortsetzung): $z^4 = -16$

Schreiben Sie die vier Lösungen $z_k = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ algebraisch und ordnen Sie jeweils zwei konjugierte Zahlen einander zu.

Eigene Lösung / Rechnung:

Lösungen auf dem Kreis

Skizzieren Sie die Lösungen von $z^3 = 1$ und $z^4 = -16$. Welche Radien und Winkelabstände treten auf?

Eigene Lösung / Rechnung:

5.5 Gleichungen und Polynomzerlegungen

Satz 5.5 (Quadratische Lösungsformel). Seien $p, q \in \mathbb{R}$ feste **Koeffizienten** und $D = \frac{p^2}{4} - q$. Die Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

hat in $\mathbb{C}$ genau die folgenden Lösungen:

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}, & D > 0 \quad (\text{zwei reelle Lösungen}), \\ -\frac{p}{2}, & D = 0 \quad (\text{eine reelle Lösung}), \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-D}i, & D < 0 \quad (\text{zwei konjugierte Lösungen}). \end{cases}$$

Bemerkung: Die vertraute Lösungsformel weiterverwenden. Für reelle p, q können wir in allen drei Fällen formal schreiben:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ist der Radikand $D < 0$, setzen wir formal $\sqrt{-1} = i$ und damit $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, wobei $\sqrt{-D}$ die positive reelle Wurzel ist. Das $\pm$ liefert beide Lösungen; bei $D = 0$ fallen sie zusammen.

Eine Gleichung mit zwei nichtreellen Lösungen

Beispiel: $z^2 + 28z + 200 = 0$

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen durch quadratische Ergänzung.

Eigene Lösung / Rechnung:

Polynome und ihre Nullstellen

Definition 5.8 (Polynom, Grad und Nullstelle). Ein **Polynom** in z hat die Form

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Die Zahlen a_j heißen **Koeffizienten**. Ist $a_n \neq 0$, heißt n der **Grad** des Polynoms; a_n ist sein führender Koeffizient.

Eine Zahl z_0 heißt **Nullstelle**, wenn $P(z_0) = 0$ gilt. Nullstellen bestimmen bedeutet also, die Gleichung $P(z) = 0$ zu lösen.

Nullstellen und Linearfaktoren

Satz 5.6 (Fundamentalsatz der Algebra). Für jedes Polynom

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

existieren n Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Die Zahlen $z_1, \dots, z_n$ sind die **Nullstellen** des Polynoms.

Wir verwenden den Satz ohne Beweis.

Bemerkung: Vielfachheit und Linearfaktoren.

- Die Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ müssen nicht voneinander verschieden sein.
- Kommt eine Nullstelle z^* genau k -mal in $z_1, \dots, z_n$ vor, so heißt z^* eine **k -fache Nullstelle** des Polynoms.
- Die Faktoren $(z - z_i)$ heißen **Linearfaktoren**.

Von komplexen zu reellen Faktoren

Bemerkung: Konjugierte Nullstellen. Hat P ausschließlich reelle Koeffizienten, so gilt $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Mit z_0 ist daher auch $\bar{z}_0$ eine Nullstelle.

Für $z_0 = a + bi$ mit $b \neq 0$ ist

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2) = (z - a)^2 + b^2.$$

Dieser Faktor hat reelle Koeffizienten und keine reellen Nullstellen.

Ein Polynom vierten Grades zerlegen

Beispiel: $P(z) = z^4 + 16$

Nutzen Sie die Lösungen von $z^4 = -16$ für eine Zerlegung in vier komplexe Linearfaktoren. Welche Faktoren gehören zusammen?

Eigene Lösung / Rechnung:

Zwei reelle quadratische Faktoren

Beispiel (Fortsetzung): $P(z) = z^4 + 16$

Fassen Sie die konjugierten Paare zusammen und prüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren.

Eigene Lösung / Rechnung:

Welche Darstellung hilft?

Wählen Sie eine passende Methode, ohne vollständig auszurechnen:

- (1) $(2 + i) + (-3 + 4i)$
- (2) $\frac{2+i}{-3+4i}$
- (3) $(1 - i)^{20}$
- (4) $z^5 = 2 + 2i$

Eigene Lösung / Rechnung: