HTWD Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden University of Applied Sciences

6 Relationen

Beziehungen, Klassen und Ordnungen

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

6.1 Grundbegriffe und Darstellungsformen . . . 3
Beziehungen durch geordnete Paare . . . 3
Relationen in unterschiedlichen Kontexten . . . 4
Identitätsrelation . . . 4
Mehrstellige Relationen . . . 4
Eine Relation, mehrere Darstellungen . . . 4
6.2 Eigenschaften binärer Relationen . . . 6
Hat jedes Element einen Partner? . . . 6
Ist der Partner eindeutig? . . . 6
Eigenschaften auf derselben Menge . . . 7
Antisymmetrie und Asymmetrie . . . 7
Transitivität . . . 7
6.3 Projektionen, inverse Relationen und Komposition . . . 9
Mit Relationen als Mengen rechnen . . . 9
Welche Elemente kommen vor? . . . 10
Die Richtung umkehren . . . 11
Beziehungen hintereinander ausführen . . . 12
Klammern und Reihenfolge . . . 13
Wege mit mehreren Schritten . . . 13
6.4 Reflexive, symmetrische und transitive Hüllen . . . 13
Fehlende Paare gezielt ergänzen . . . 13
Warum sind dies die kleinsten Ergänzungen? . . . 14
Transitive Hülle und Zyklen . . . 15
Eigenschaften mit Mengenoperationen prüfen . . . 15
6.5 Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen . . . 16
Was ist eine Äquivalenzrelation? . . . 16
Klassen und Vertreter . . . 16
Klassen sind gleich oder disjunkt . . . 17
Aus einer Zerlegung eine Relation gewinnen . . . 17
Restklassen als wichtiges Beispiel . . . 18

Geraden nach ihrer Richtung zusammenfassen 18
6.6 Ordnungsrelationen und Hasse-Diagramme 18
Was ist eine Ordnungsrelation? 18
Strikte Ordnungen 19
Direkte Nachfolger und Überdeckungsrelation 20
Hasse-Diagramme 20
Größte, kleinste und maximale Elemente 21
Schranken, Infimum und Supremum 22

Wer arbeitet an welchem Projekt mit?

In der Projektverwaltung: Konten `mia`, `noah`; Projekte `portal`, `app`.

- `mia` arbeitet an `portal` und `app` mit.
- `noah` arbeitet nur an `portal` mit.

Zwei getrennte Listen für Konten und Projekte reichen nicht aus, um die Zuordnungen zu speichern. Welche Zeilen braucht eine Tabelle mit den Spalten **Konto** und **Projekt**?

Eigene Lösung / Rechnung:

6.1 Grundbegriffe und Darstellungsformen

Beziehungen durch geordnete Paare

Definition 6.1 (Binäre Relation). Seien A, B Mengen. Eine Teilmenge $T \subseteq A \times B$ heißt **binäre Relation** von A nach B.

Ist T endlich, so spricht man von einer **endlichen Relation**.

Für $A = B = M$ heißt T eine **Relation auf** M.

Die Schreibweisen $(x, y) \in T$ und $x\,T\,y$ bedeuten dasselbe: „x steht in Relation T zu y“.

Grenzfälle. Sowohl $\emptyset$ als auch $A \times B$ sind Relationen.

Was beschreibt die Relation?

Beispiel: Eine Relation auf vier Zahlen

Auf $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sei

$$T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}.$$

Beschreiben Sie die Beziehung in Worten.

Eigene Lösung / Rechnung:

Relationen in unterschiedlichen Kontexten

Die Einträge eines Paares können ganz unterschiedliche Objekte sein:

- **Zahlen vergleichen:** Auf $\mathbb{R}$ gilt $(x, y) \in T$ genau dann, wenn $x \leq y$.
- **Geometrie:** Für Geraden einer Ebene gilt $(g, h) \in T$ genau dann, wenn g senkrecht auf h steht.
- **Soziales Netzwerk:** Für Benutzerkonten gilt $(a, b) \in T$ genau dann, wenn Konto a dem Konto b folgt.
- **Datenbank einer Hochschule:** Für Studierende und Lehrveranstaltungen gilt $(s, v) \in T$ genau dann, wenn s in der Veranstaltung v eingeschrieben ist.
- **Software:** Für Module eines Programms gilt $(A, B) \in T$ genau dann, wenn Modul A das Modul B direkt importiert.

Senkrechtstehen gilt in beiden Richtungen; Folgen oder Importieren müssen das nicht. Die Hochschulrelation verbindet sogar Objekte aus zwei verschiedenen Mengen.

Identitätsrelation

Definition 6.2 (Identitätsrelation). Die **Identitätsrelation** auf M ist

$$I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}.$$

Sie enthält genau die Paare mit gleichen Einträgen.

Mehrstellige Relationen

Definition 6.3 (Mehrstellige Relation). Für Mengen $M_1, \dots, M_n$ mit $n \geq 1$ heißt eine Teilmenge

$$T \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$$

eine n**-stellige Relation**.

Eine Relation, mehrere Darstellungen

Darstellungen einer endlichen Relation.

- **Paarmenge:** alle $(x, y) \in T$ aufzählen.
- **Pfeildiagramm:** A links, B rechts; Pfeil von x nach y genau für $(x, y) \in T$.
- **Koordinatenbild:** die zugehörigen Punkte (x, y) markieren.
- **Gerichteter Graph auf M:** ein Knoten je Element; Pfeil $x \to y$ für jedes Paar. Ein Paar (x, x) ergibt eine Schlinge.

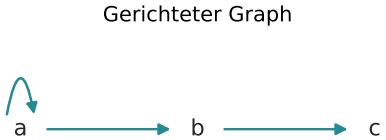
Tabelle und Graph lesen

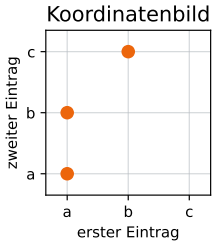
Beispiel: Ein Pfeilweg mit Schlinge

Auf $M = \{a, b, c\}$ sei $T = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$.

- Zeile: erster Eintrag
- Spalte: zweiter Eintrag
- 1: Paar gehört zu T,
- 0: Paar gehört nicht zu T.

T	a	b	c
a	1	1	0
b	0	0	1
c	0	0	0





Eine Regel aus Paaren erkennen

Beispiel:

Sei $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Eine Relation enthalte genau die Paare

$$T = \{(-2,-2), (-2,2), (2,-2), (2,2), \\ (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1), (0,0)\}.$$

Formulieren Sie eine Regel für $x\,T\,y$ und skizzieren Sie den Graphen.

Eigene Lösung / Rechnung:

6.2 Eigenschaften binärer Relationen

Hat jedes Element einen Partner?

Definition 6.4 (Links- und Rechtsvollständigkeit). Eine Relation $T \subseteq A \times B$ heißt

- **linksvollständig** (linkstotal), wenn $\forall x \in A\ \exists y \in B : (x, y) \in T$;
- **rechtsvollständig** (rechtstotal), wenn $\forall y \in B\ \exists x \in A : (x, y) \in T$.

Links beziehungsweise rechts darf kein Element ohne Partner bleiben.

Ist der Partner eindeutig?

Definition 6.5 (Rechts- und Linkseindeutigkeit). Eine Relation $T \subseteq A \times B$ heißt

- **rechtseindeutig**, wenn aus $(x, y_1) \in T$ und $(x, y_2) \in T$ stets $y_1 = y_2$ folgt;
- **linkseindeutig**, wenn aus $(x_1, y) \in T$ und $(x_2, y) \in T$ stets $x_1 = x_2$ folgt.

Bei Rechtseindeutigkeit hat jedes $x \in A$ **höchstens einen** Partner in B; bei Linkseindeutigkeit hat jedes $y \in B$ höchstens einen Partner in A.

Der Übergang zum Funktionsbegriff

Funktionen als Relationen. Eine linksvollständige und rechtseindeutige Relation $T \subseteq A \times B$ ist der Graph einer Funktion $A \to B$. Jedes Element von A hat dann **genau einen** Partner in B.

Städte und Länder zuordnen

Beispiel: Städte und Länder

$S = \{\text{Berlin, Dresden, Köln, Paris, Rom, Neapel, Oslo}\}$, $L = \{\text{D, F, B, I, P, N}\}$. Die Kürzel stehen für Deutschland, Frankreich, Belgien, Italien, Polen und Norwegen.

$(x, y) \in T$ bedeutet: Stadt x liegt in Land y. Zeichnen Sie das Pfeildiagramm und prüfen Sie Vollständigkeit und Eindeutigkeit.

Eigene Lösung / Rechnung:

Eigenschaften auf derselben Menge

Definition 6.6 (Reflexivität und Symmetrie). Eine Relation T auf M heißt

- **reflexiv**, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in T$;
- **irreflexiv**, wenn $\forall x \in M : (x, x) \notin T$;
- **symmetrisch**, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$.

Antisymmetrie und Asymmetrie

Definition 6.7 (Antisymmetrie und Asymmetrie). Eine Relation T auf M heißt

- **antisymmetrisch**, wenn $\forall x, y \in M : ((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \Rightarrow x = y$;
- **asymmetrisch**, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \notin T$.

Beachte:

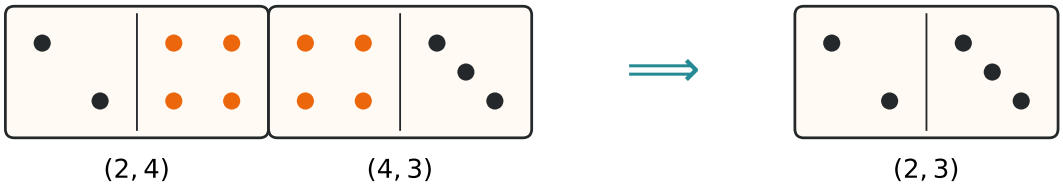
- I_M ist symmetrisch und antisymmetrisch zugleich.
- Für $M \neq \emptyset$ ist I_M nicht asymmetrisch.
- Eine Relation ist genau dann asymmetrisch, wenn sie antisymmetrisch und irreflexiv ist.

Transitivität

Definition 6.8 (Transitivität). Eine Relation T auf M heißt **transitiv**, wenn

$$\forall x, y, z \in M : ((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \Rightarrow (x, z) \in T.$$

Schematische Darstellung:



In der Darstellunga als gerichteter Graph: Jeder Weg aus zwei Pfeilen muss also einen direkten Pfeil vom Anfang zum Ende haben.

Eigenschaften am gerichteten Graph prüfen

Bemerkung. Sei $T \subseteq M \times M$. Jedes Element ist ein Knoten; $(x, y) \in T$ wird durch einen Pfeil $x \to y$ dargestellt.

Eigenschaft	Woran erkennt man sie?
reflexiv	Jeder Knoten hat eine Schlinge.
irreflexiv	Kein Knoten hat eine Schlinge.
symmetrisch	Zu jedem Pfeil $x \to y$ gibt es den Gegenpfeil $y \to x$.
antisymmetrisch	Zwischen verschiedenen Knoten gibt es keine Gegenpfeile. Schlingen sind erlaubt.
asymmetrisch	Es gibt weder Gegenpfeile noch Schlingen.
transitiv	Zu jedem Weg $x \to y \to z$ gibt es auch den direkten Pfeil $x \to z$.

Bei einem Weg $x \to y \to x$ verlangt Transitivität also eine Schlinge bei x.

Eigenschaften im Koordinatenbild prüfen

Bemerkung. Für $T \subseteq M \times M$ verwenden wir auf beiden Achsen dieselben Elemente in derselben Reihenfolge und markieren alle Paare aus T.

Eigenschaft	Woran erkennt man sie?
reflexiv	Alle Diagonalpunkte (x, x) sind markiert: $I_M \subseteq T$.
irreflexiv	Kein Diagonalpunkt ist markiert.
symmetrisch	Zu jedem markierten Punkt (x, y) ist sein Spiegelpunkt (y, x) markiert.
antisymmetrisch	Außerhalb der Diagonalen sind niemals ein Punkt und sein Spiegelpunkt beide markiert.
asymmetrisch	Wie bei Antisymmetrie; zusätzlich ist kein Diagonalpunkt markiert.
transitiv	Sind (x, y) und (y, z) markiert, muss auch (x, z) markiert sein.

Beziehungen vergleichen

Beispiel: Jünger und gleicher Jahrgang

Sei S die Menge aller Studierenden einer Universität. In S gibt es unterschiedliche Geburtsdaten und mehrere Personen desselben Geburtsjahres.

J: „hat ein späteres Geburtsdatum als“.

G: „hat dasselbe Geburtsjahr wie“.

Prüfen Sie die fünf Eigenschaften und nennen Sie Begründungen.

Eigenschaft	J	G
reflexiv		
symmetrisch		
antisymmetrisch		
asymmetrisch		
transitiv		

Eine Behauptung gezielt widerlegen

Auf einer nichtleeren Menge M sei $T = \emptyset$. Ist T symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Ist es reflexiv? Begründen Sie mithilfe der Implikationen.

Eigene Lösung / Rechnung:

6.3 Projektionen, inverse Relationen und Komposition

Mit Relationen als Mengen rechnen

Mengenoperationen. Für $R, S \subseteq A \times B$ sind auch $R \cup S$, $R \cap S$ und $R \setminus S$ Relationen von A nach B.

- $(x, y) \in R \cup S$: mindestens eine der beiden Beziehungen gilt.
- $(x, y) \in R \cap S$: beide Beziehungen gelten.
- $(x, y) \in R \setminus S$: $(x, y) \in R$ und $(x, y) \notin S$.

Bekannte Beziehungen verknüpfen

Beispiel: Kleiner gleich und größer gleich

Auf $\mathbb{R}$ seien $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ und $S = \{(x, y) \mid x \geq y\}$. Bestimmen Sie

$$R \cap S \quad \text{und} \quad R \setminus (R \cap S).$$

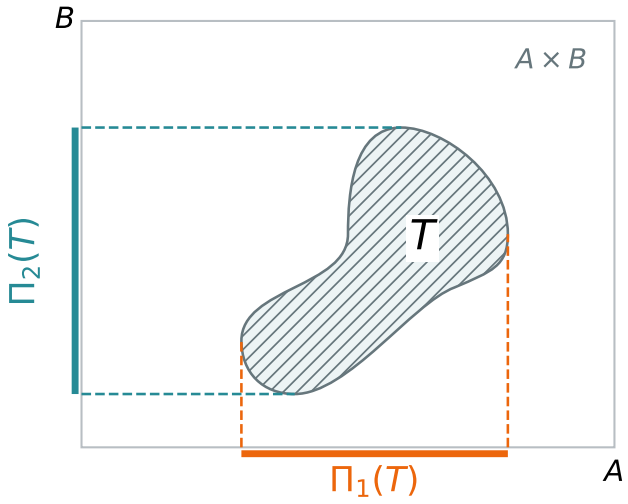
Eigene Lösung / Rechnung:

Welche Elemente kommen vor?

Definition 6.9 (Projektionen). Für $T \subseteq A \times B$ heißen

$$\Pi_1(T) = \{x \in A \mid \exists y \in B : (x, y) \in T\},$$
$$\Pi_2(T) = \{y \in B \mid \exists x \in A : (x, y) \in T\}$$

die **Projektionen** von T auf den ersten beziehungsweise zweiten Faktor.



T ist linksvollständig genau dann, wenn $\Pi_1(T) = A$, und rechtsvollständig genau dann, wenn $\Pi_2(T) = B$.

Projektionen aus einer Sachaufgabe gewinnen

Beispiel: Nachprüfungen

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bezeichnet Studierende, $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ Fächer. $(x, y) \in P$ bedeutet: Person x muss im Fach y zur Nachprüfung.

- Personen 1 und 3 haben alle Prüfungen bestanden.
- Person 2 muss in a, d, e zur Nachprüfung.
- Person 4 muss in b, f, Person 5 in b, d, e, f zur Nachprüfung.

Geben Sie P und beide Projektionen an. Skizzieren Sie das Koordinatenbild.

Eigene Lösung / Rechnung:

Die Richtung umkehren

Definition 6.10 (Inverse Relation). Die **inverse Relation** zu $T \subseteq A \times B$ ist

$$T^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in T\} \subseteq B \times A.$$

Im Pfeildiagramm kehren wir alle Pfeile um; im Koordinatenbild vertauschen wir die Achsenrollen.

Länder und Städte vertauschen

Sei S die Menge der Städte Berlin, Dresden, Köln, Paris, Rom, Neapel und Oslo und L die Menge der Länder Deutschland, Frankreich, Belgien, Italien, Polen und Norwegen. Die Relation $T \subseteq S \times L$ ist gegeben durch

Stadt	Land
Berlin, Dresden, Köln	Deutschland
Paris	Frankreich
Rom, Neapel	Italien
Oslo	Norwegen

Jede genannte Stadt bildet mit dem Land rechts ein Paar in T.

1. Geben Sie die inverse Relation $T^{-1} \subseteq L \times S$ elementweise an.
2. Ist T^{-1} der Graph einer Funktion $L \to S$? Begründen Sie.

Eigene Lösung / Rechnung:

Beziehungen hintereinander ausführen

Definition 6.11 (Komposition von Relationen). Für $S \subseteq A \times B$ und $T \subseteq B \times C$ definieren wir

$$T \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in T\}. \tag{6.1}$$

Achtung: Reihenfolge der Auswertung ist von rechts nach links.

Einen Zwischenknoten suchen

Beispiel: Verwandtschaft verketten

Auf einer Menge M von Personen seien S: „ist Mutter von“ und T: „ist verheiratet mit“. Was bedeutet $(x, z) \in T \circ S$?

Eigene Lösung / Rechnung:

Klammern und Reihenfolge

Satz 6.1 (Rechenregeln der Komposition). Für $S \subseteq A \times B, T \subseteq B \times C, U \subseteq C \times D$ gilt

$$(U \circ T) \circ S = U \circ (T \circ S),$$
$$I_B \circ S = S = S \circ I_A, \qquad (T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}.$$

Komposition ist **assoziativ**, im Allgemeinen aber **nicht kommutativ**.

Die Reihenfolge testen

Auf $M = \{1, 2, 3\}$ seien $S = \{(1, 2)\}$ und $T = \{(2, 3)\}$. Vergleichen Sie $S \circ T$ und $T \circ S$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Wege mit mehreren Schritten

Definition 6.12 (Potenzen einer Relation). Für eine Relation T auf M setzen wir

$$T^0 := I_M, \qquad T^1 := T, \qquad T^{n+1} := T \circ T^n \quad (n \geq 1).$$

$(x, y) \in T^n$ bedeutet: Es gibt einen gerichteten Weg von x nach y mit **genau** n **Schritten**; Knoten dürfen mehrfach vorkommen.

6.4 Reflexive, symmetrische und transitive Hüllen

Fehlende Paare gezielt ergänzen

Definition 6.13 (Reflexive, symmetrische und transitive Hülle). Für $T \subseteq M \times M$ heißen

$$\begin{aligned} [T]_{\text{refl}} &= T \cup I_M, \\ [T]_{\text{sym}} &= T \cup T^{-1}, \\ [T]_{\text{tran}} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n \end{aligned} \tag{6.2}$$

die **reflexive**, **symmetrische** beziehungsweise **transitive Hülle**. Die reflexiv-transitive Hülle ist $T^* = I_M \cup [T]_{\text{tran}}$.

Warum sind dies die kleinsten Ergänzungen?

Satz 6.2 (Minimalität der Hüllen). Für jede der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv ist die zugehörige Hülle H die **kleinste Relation**, die T enthält und die Eigenschaft besitzt:

(1) $T \subseteq H$, und H besitzt die geforderte Eigenschaft.
(2) Für jede Relation R mit $T \subseteq R$, die diese Eigenschaft besitzt, gilt $H \subseteq R$.

Den Beweis selbst entwickeln

Sei $H = \bigcup_{n \geq 1} T^n$.

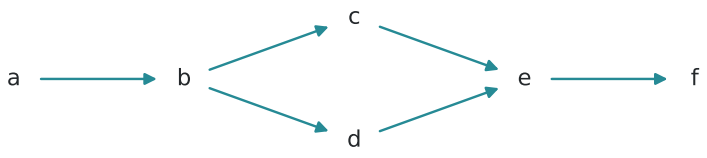
(1) Ein Weg von x nach y hat j Schritte, einer von y nach z hat k Schritte. Warum folgt daraus Transitivität von H?
(2) Warum muss eine transitive Relation $R \supseteq T$ auch jeden längeren Weg abkürzen?

Eigene Lösung / Rechnung:

Erreichbarkeit in einem verzweigten Graphen

Beispiel: Wege von a bis f

$M = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $T = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\}$. Bestimmen Sie T^2, T^3, T^4 und die transitive Hülle.



Eigene Lösung / Rechnung:

Andere Hüllen desselben Graphen

Ergänzen Sie im Graphen „Wege von a bis f“ die reflexive beziehungsweise symmetrische Hülle. Welche Paare kommen jeweils hinzu?

Eigene Lösung / Rechnung:

Transitive Hülle und Zyklen

Beachte:

- Enthält T die Paare (x, y) und (y, x), so enthält $[T]_{\text{tran}}$ auch (x, x) und (y, y). Durch das Bilden der transitiven Hülle können also Schlingen entstehen.
- Auf einer endlichen Menge kann man fehlende Abkürzungen wiederholt ergänzen, bis kein neues Paar hinzukommt. Da es nur $|M|^2$ mögliche Paare gibt, endet dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten.

Bestimmen Sie die transitive Hülle von $T = \{(1, 2), (2, 1)\}$ auf $M = \{1, 2, 3\}$. Wird dadurch auch $(3, 3)$ ergänzt?

Eigene Lösung / Rechnung:

Eigenschaften mit Mengenoperationen prüfen

Satz 6.3 (Mengenkriterien für Relationseigenschaften). Für $T \subseteq M \times M$ gilt:

Eigenschaft	Gleichwertiges Mengenkriterium
reflexiv	$I_M \subseteq T$
symmetrisch	$T^{-1} = T$
antisymmetrisch	$T \cap T^{-1} \subseteq I_M$
asymmetrisch	$T \cap T^{-1} = \emptyset$
transitiv	$T \circ T \subseteq T$

6.5 Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Was ist eine Äquivalenzrelation?

Definition 6.14 (Äquivalenzrelation). Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie **reflexiv, symmetrisch und transitiv** ist.

Statt $(x, y) \in T$ schreiben wir dann auch $x \sim y$ und sagen: „x ist äquivalent zu y“.

Die drei Eigenschaften lassen sich wie folgt deuten:

- Jedes Element ist zu sich selbst äquivalent.
- Äquivalenz gilt in beiden Richtungen.
- Äquivalenz überträgt sich über ein Zwischenelement.

Klassen und Vertreter

Definition 6.15 (Äquivalenzklasse und Quotientenmenge). Sei T eine Äquivalenzrelation auf M. Die **Äquivalenzklasse** von $x \in M$ ist

$$[x]_T = \{y \in M \mid (x, y) \in T\}.$$

Jedes Element dieser Klasse heißt **Vertreter** der Klasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt **Quotientenmenge**:

$$M \,/\, T = \{[x]_T \mid x \in M\}.$$

Ist die Relation klar, schreiben wir kurz $[x]$.

Gerade und ungerade Zahlen zusammenfassen

Beispiel: Gleiche Parität auf den ganzen Zahlen

Auf $\mathbb{Z}$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ gerade ist. Begründen Sie die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation und bestimmen Sie $[0]$, $[1]$ und $[6]$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Klassen sind gleich oder disjunkt

Satz 6.4 (Zerlegung in Äquivalenzklassen). Für eine Äquivalenzrelation auf M gilt:

(1) $x \in [x]$ für jedes $x \in M$.
(2) $x \sim y \iff [x] = [y]$.
(3) Verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt
(4) Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ergibt M.

Die Äquivalenzklassen bilden eine **Partition** von M: eine Zerlegung in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.

Aus einer Zerlegung eine Relation gewinnen

Satz 6.5 (Äquivalenzrelation einer Partition). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie **nichtleerer**, paarweise disjunkter Teilmengen mit $\bigcup_{i \in I} M_i = M$. Dann ist

$$x \sim y \iff \exists i \in I : x \in M_i \wedge y \in M_i$$

eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind genau die Mengen M_i.

Klassen von Personen bilden

Beispiel: Gleiche Blutgruppe

$M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Die Personen a, c haben Blutgruppe A, b hat B, d hat 0, und e, f haben AB. Die Relation bedeutet ausschließlich „hat dieselbe Blutgruppe wie“.

Bestimmen Sie $[a]$, $[b]$, $[d]$, $[e]$ und $M \,/\, T$. Wie viele geordnete Paare enthält T?

Eigene Lösung / Rechnung:

Restklassen als wichtiges Beispiel

Definition 6.16 (Kongruenz modulo m). Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ heißt

$$x \equiv y \pmod{m} \iff m \mid (x - y),$$

dass x und y **kongruent modulo** m sind. Dabei bedeutet $m \mid (x - y)$, dass $x - y = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Satz 6.6 (Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation). Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Ihre genau m Klassen sind

$$[r] = \{r + km \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad r = 0, \dots, m - 1.$$

Die Quotientenmenge ist $\{[0], [1], \dots, [m - 1]\}$.

Restklassen erkennen

Bestimmen Sie modulo 4 die Klassen von -1, 7 und 10. Geben Sie die gesamte Quotientenmenge an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Geraden nach ihrer Richtung zusammenfassen

Beispiel: Parallelität einschließlich identischer Geraden

Auf der Menge aller Geraden einer Ebene erklären wir $g \sim h$, wenn g und h dieselbe Richtung haben. **Identische Geraden gelten hier als parallel.**

Diese Beziehung ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. $[g]$ besteht aus allen Geraden derselben Richtung wie g. Die Quotientenmenge beschreibt die unorientierten Geradenrichtungen, einschließlich der vertikalen Richtung.

6.6 Ordnungsrelationen und Hasse-Diagramme

Was ist eine Ordnungsrelation?

Definition 6.17 (Ordnungsrelation). Eine Relation T auf M heißt **Ordnungsrelation** (kurz **Ordnung**), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Wir schreiben häufig $x \preceq y$ statt $(x, y) \in T$.

Sie heißt **vollständige** (oder **totale**) **Ordnungsrelation**, wenn zusätzlich

$$\forall x, y \in M : \; x \preceq y \; \vee \; y \preceq x. \tag{6.3}$$

Ohne die Zusatzbedingung (6.3) dürfen Elemente **unvergleichbar** sein.

Strikte Ordnungen

Definition 6.18 (Strikte Ordnungsrelation). Eine Relation S auf M heißt **strikte Ordnungsrelation** (kurz **strikte Ordnung**), wenn sie **asymmetrisch und transitiv** ist. Wir schreiben häufig $x \prec y$.

Sie heißt **vollständige** (oder **totale**) **strikte Ordnungsrelation**, wenn für alle verschiedenen $x, y \in M$ gilt: $x \prec y$ oder $y \prec x$.

Satz 6.7 (Übergang zwischen beiden Ordnungsformen). Ist T eine Ordnung auf M, so ist $S = T \setminus I_M$ eine strikte Ordnung. Ist umgekehrt S eine strikte Ordnung, so ist $T = S \cup I_M$ eine Ordnung.

Diese Zuordnungen machen einander rückgängig; Vollständigkeit bleibt erhalten.

Vier vertraute Beziehungen einordnen

Beispiel: Zahlen und Teilmengen

Sei M eine Menge mit mindestens zwei Elementen.

Ordnen Sie $\leq$ und $<$ auf $\mathbb{R}$ sowie $\subseteq$ und $\subsetneq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ein: strikt oder nichtstrikt, total oder nicht total? Geben Sie gegebenenfalls unvergleichbare Elemente an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Direkte Nachfolger und Überdeckungsrelation

Definition 6.19 (Direkter Nachfolger und Überdeckungsrelation). Sei T eine Ordnung auf M. Wir schreiben $x \preceq y$ für $(x, y) \in T$ und $x \prec y$ für $(x, y) \in T \setminus I_M$. Die **Überdeckungsrelation** $C \subseteq T \setminus I_M$ ist definiert durch

$$(a, b) \in C \iff a \prec b \land \nexists c \in M : a \prec c \prec b.$$

Für $(a, b) \in C$ heißt a **direkter Vorgänger** von b und b **direkter Nachfolger** von a.

Hasse-Diagramme

Definition 6.20 (Hasse-Diagramm). Sei T eine Ordnung auf M mit Überdeckungsrelation C. Ihr **Hasse-Diagramm** hat die Elemente von M als Knoten und genau dann eine gerichtete Kante von a nach b, wenn $(a, b) \in C$.

Für endliche Mengen verwenden wir folgende Zeichnung:

(1) einen Knoten für jedes Element,
(2) eine Verbindung für jedes Paar der Überdeckungsrelation,
(3) den größeren Knoten jeweils **oberhalb** des kleineren.

Die Richtung von unten nach oben erlaubt es, die Pfeilspitzen wegzulassen.

Eine endliche Ordnung rekonstruieren

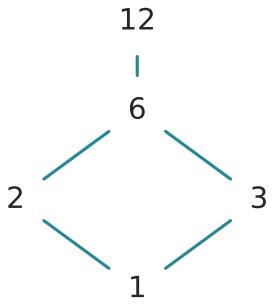
Satz 6.8 (Rekonstruktion aus der Überdeckungsrelation). Ist M **endlich**, T eine Ordnung auf M und C ihre Überdeckungsrelation, so gilt

$$T = I_M \cup [C]_{\text{tran}}, \qquad T \setminus I_M = [C]_{\text{tran}}.$$

Ein Hasse-Diagramm lesen

Beispiel: Teilbarkeit auf fünf Zahlen

Auf $M = \{1, 2, 3, 6, 12\}$ sind die Überdeckungen $(1, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 6), (6, 12)$. Obwohl $1 \mid 12$ gilt, wird dafür keine eigene Verbindung gezeichnet.



Eine Potenzmenge anordnen

Beispiel: Teilmengen von vier Elementen

Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ mit der Inklusion. Ordnen Sie die Mengen nach ihrer Elementanzahl in Ebenen an. Wann ist eine Menge direkter Nachfolger einer anderen?

Eigene Lösung / Rechnung:

Größte, kleinste und maximale Elemente

Definition 6.21 (Minimum, Maximum, minimale und maximale Elemente). Sei $A \subseteq M$ in einer geordneten Menge $(M, \preceq)$.

- $m \in A$ heißt **das Minimum** von A, wenn $m \preceq x$ für alle $x \in A$ gilt.
- $m \in A$ heißt **ein minimales Element** von A, wenn aus $x \in A$ und $x \preceq m$ stets $x = m$ folgt.
- $m \in A$ heißt **das Maximum** von A, wenn $x \preceq m$ für alle $x \in A$ gilt.
- $m \in A$ heißt **ein maximales Element** von A, wenn aus $x \in A$ und $m \preceq x$ stets $x = m$ folgt.

Das Minimum bezeichnen wir mit $\min A$, das Maximum mit $\max A$, sofern sie existieren.

Schranken, Infimum und Supremum

Definition 6.22 (Schranken, Infimum und Supremum in einer Ordnung). Sei T eine **Ordnungsrelation** auf M. Wir schreiben $x \preceq y$ für $(x, y) \in T$.

Für $A \subseteq M$ heißt $u \in M$ **obere Schranke**, wenn $x \preceq u$ für alle $x \in A$ gilt; $\ell \in M$ heißt **untere Schranke**, wenn $\ell \preceq x$ für alle $x \in A$ gilt.

Das **Supremum** sup A ist die kleinste obere Schranke, falls sie existiert. Das **Infimum** inf A ist die größte untere Schranke, falls sie existiert.

Für eine **strikte Ordnungsrelation** S auf M definieren wir Schranken, Supremum und Infimum bezüglich der zugehörigen Ordnung $T = S \cup I_M$, also nach dem Übergang zur **reflexiven Hülle** von S.

Bemerkung. Liegt sup A in A, ist es zugleich max A; liegt inf A in A, ist es zugleich min A.

Einen Arbeitsablauf modellieren

Beispiel: Arbeitsgänge einer Subfirma

Eine Aufgabe besteht aus den Arbeitsgängen $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es gelten die Vorgaben: 1 vor 2, 2 vor 3 und 5, 3 vor 4 sowie 5 vor 6. Eine Subfirma übernimmt $A = \{2, 3, 5\}$.

Geben Sie die Überdeckungsrelation U an und zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der daraus entstehenden Ordnung.

Eigene Lösung / Rechnung:

Die Abhängigkeiten sichtbar machen

Bestimmen Sie U^2, U^3 und $[U]_{\text{tran}}$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Schranken im Arbeitsablauf bestimmen

Verwenden Sie die nichtstrikte Ordnung $I_M \cup [U]_{\text{tran}}$. Bestimmen Sie für $A = \{2, 3, 5\}$ alle oberen und unteren Schranken, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum sowie die maximalen Elemente.

Eigene Lösung / Rechnung:

Quizfrage

Welche Eigenschaften unterscheiden eine Äquivalenzrelation von einer Ordnung? Kann eine Relation auf M beides zugleich sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eigene Lösung / Rechnung: