

7 Funktionen

Zuordnen, umkehren und Funktionsgraphen verstehen

Fabian Schwarzenberger

Inhaltsverzeichnis

7.1	Funktionsbegriff, Graph, Bild und Urbild	3
	Eingabe, Ausgabe und zulässige Mengen	3
	Der Graph als Relation	3
	Bild und Urbild	4
7.2	Injektivität, Surjektivität und Bijektivität	5
	Drei wichtige Eigenschaften	5
	Wie viele Urbilder hat ein Wert?	5
	Wie zeigt oder widerlegt man die Eigenschaften?	5
	Gleiche Vorschrift, andere Eigenschaften	6
	Was verrät die Anzahl der Elemente?	6
7.3	Umkehrfunktionen und Verkettungen	6
	Eine Zuordnung rückgängig machen	6
	Funktionen hintereinander ausführen	7
	Identität und inverse Verkettung	8
7.4	Mächtigkeit und Abzählbarkeit	8
	Zählen durch Zuordnen	8
	Unendlich und trotzdem abzählbar	9
	Die rationalen Zahlen lassen sich abzählen	9
	Die reellen Zahlen sind überabzählbar	9
	Die Potenzmenge ist stets mächtiger	10
	Mehrere Größen des Unendlichen	10
	Teilmengen als unendliche Bitfolgen	10
	Von Bitfolgen zu reellen Zahlen	11
	Es gibt keine größte Mächtigkeit	11
7.5	Polynome	11
	Vom Polynom zur reellen Funktion	11
	Nullstellen und Vorzeichen	12
	Der führende Term für große Beträge von x	13
	Grundform, Streckung und Verschiebung	13
7.6	Gebrochenrationale Funktionen	14

Der Nenner begrenzt die erlaubten Argumente	14
Kürzen verändert den ursprünglichen Definitionsbereich nicht	14
Polynomanteil und Rest trennen	15
7.7 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen	17
Monotonie	17
Fester Exponent, veränderliche Basis	18
Exponentialfunktion	18
Logarithmusfunktion	18
Wachstum und Umkehrung im Graphen	19
7.8 Trigonometrische Funktionen	20
Sinus und Kosinus am Einheitskreis	20
Tangens und Kotangens	21
Periodizität und Symmetrie	21
Eigenschaften der vier trigonometrischen Funktionen	21
Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus	22
Amplitude und Frequenz	23
7.9 Hyperbelfunktionen	24
Aus Exponentialfunktionen zusammengesetzt	24
Warum „Hyperbel“?	24
Bildmengen und Symmetrien	25
Summen von Argumenten	25
7.10 Arcus- und Areafunktionen	26
Periodische Funktionen geeignet einschränken	26
Alle Lösungen einer trigonometrischen Gleichung bestimmen	27
Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen	28
Areafunktionen mit Logarithmen berechnen	28
Die vier Areafunktionen im Vergleich	29

Kann man eine Ausgabe zurückverfolgen?

Ein Dienst berechnet zu jedem endlichen Binärwort seine Länge:

$$\ell : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad w \mapsto \ell(w).$$

Hier bezeichnet $\{0, 1\}^*$ alle endlichen Binärwörter einschließlich des leeren Wortes ε mit $\ell(\varepsilon) = 0$.

- Erhält man aus jeder Eingabe eine eindeutige Ausgabe?
- Welche Ausgabe erhalten 010 und 111?
- Kann man aus der Ausgabe die Eingabe eindeutig rekonstruieren?
- Kommt jede Zahl aus $\mathbb{N}_0$ als Ausgabe vor?

Eigene Lösung / Rechnung:

7.1 Funktionsbegriff, Graph, Bild und Urbild

Eingabe, Ausgabe und zulässige Mengen

Definition 7.1 (Funktion). Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f : X \rightarrow Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zu. Wir schreiben

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

$X = D_f$ heißt **Definitionsbereich**, $Y = W_f$ heißt **Wertebereich (auch Zielbereich)**. Die Zahl oder das Objekt x heißt **Argument**, $f(x)$ **Funktionswert**.

Der Graph als Relation

Definition 7.2 (Graph einer Funktion). Der **Graph** von $f : X \rightarrow Y$ ist die Menge

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Bemerkung. Eine Relation $G \subseteq X \times Y$ ist genau dann der Graph einer Funktion $X \rightarrow Y$, wenn sie **linksvollständig und rechtseindeutig** ist:

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in G.$$

Bild und Urbild

Definition 7.3 (Bild und Urbild). Für $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ heißen

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$$

das **Bild von** A und

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$$

das **Urbild von** B . Die **Bildmenge** $f(X)$ ist die Menge aller tatsächlich angenommenen Funktionswerte, wenn jedes $x \in X$ einmal eingesetzt wird.

Bemerkung. Die Bildmenge $f(X) \subseteq Y$ kann eine echte Teilmenge des Wertebereichs Y sein.

Graph, Bild und Urbild bestimmen

Ein kleiner Hashwert wird durch $h : \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ mit $h(n) = n \bmod 3$ berechnet.

- (1) Geben Sie den Graphen und die Bildmenge an.
- (2) Bestimmen Sie $h^{-1}(\{1\})$ und $h^{-1}(\{0, 2\})$.

Eigene Lösung / Rechnung:

Beispiel: Unterschiedliche Definitionsbereiche

- Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, verarbeitet ein Zahlenpaar; ihr Graph ist ein Paraboloid im Raum.
- Eine **reelle Zahlenfolge** ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt $a(n)$ schreiben wir meist a_n , für die gesamte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für $a_n = \frac{n}{n+1}$ beginnt sie mit $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
- Ein **Wort** ist eine endliche Zeichenkette. Die Funktion

$$\ell : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad w \mapsto \ell(w)$$

berechnet die Länge eines Binärwortes. Hier bezeichnet $\{0, 1\}^*$ alle endlichen Binärwörter einschließlich des leeren Wortes ε mit $\ell(\varepsilon) = 0$.

7.2 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Drei wichtige Eigenschaften

Definition 7.4 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität). Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt

- **injektiv**, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt;
- **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$, also zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert;
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Eine solche Funktion heißt auch **Injektion**, **Surjektion** bzw. **Bijektion**.

Wie viele Urbilder hat ein Wert?

Bemerkung. Für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ gilt:

- f ist **surjektiv** $\iff$ zu jedem $y \in Y$ existiert **mindestens ein** $x \in X$ mit $f(x) = y$.
- f ist **injektiv** $\iff$ zu jedem $y \in Y$ existiert **maximal ein** $x \in X$ mit $f(x) = y$.
- f ist **bijektiv** $\iff$ zu jedem $y \in Y$ existiert **genau ein** $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Wie zeigt oder widerlegt man die Eigenschaften?

Injektivität: Beginnen Sie mit $f(x_1) = f(x_2)$ und folgern Sie $x_1 = x_2$. Zwei verschiedene Argumente mit gleicher Ausgabe widerlegen die Eigenschaft.

Surjektivität: Wählen Sie ein beliebiges $y \in Y$ und finden Sie ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Prüfen Sie dabei, ob das gefundene x im Definitionsbereich liegt. Ein unerreichter Wert in Y widerlegt Surjektivität.

Welche Daten lassen sich zurückgewinnen?

Ordnen Sie die Funktionen ein und begründen Sie die Entscheidung:

- (1) $h : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}, h(n) = n \bmod 2.$
- (2) $c : \{0, 1\} \rightarrow \{00, 01, 10, 11\}, c(0) = 01, c(1) = 10.$
- (3) $b : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}, b(u, v) = 2u + v.$

Eigene Lösung / Rechnung:

Gleiche Vorschrift, andere Eigenschaften

Beispiel: Vier Varianten der Quadratfunktion

Funktion mit Vorschrift	injektiv	surjektiv
$x \mapsto x^2$		
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$		
$[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$		
$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$		

Was verrät die Anzahl der Elemente?

Satz 7.1 (Funktionen zwischen endlichen Mengen). Seien X, Y endlich und $f : X \rightarrow Y$.

- Ist f injektiv, so gilt $|X| \leq |Y|$.
- Ist f surjektiv, so gilt $|X| \geq |Y|$.
- Ist $|X| = |Y|$, so ist f genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

7.3 Umkehrfunktionen und Verkettungen

Eine Zuordnung rückgängig machen

Definition 7.5 (Umkehrfunktion). Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so heißt die Funktion

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto \text{das eindeutige } x \text{ mit } f(x) = y$$

die **Umkehrfunktion** von f .

Beachte:

- $f^{-1}(y)$ ist ein **Funktionswert der Umkehrfunktion**, sofern diese existiert.
- $f^{-1}(B)$ ist ein **Urbild einer Menge** und ist für jede Funktion definiert.
- $\frac{1}{f(x)}$ ist dagegen ein **Kehrwert**, sofern $f(x) \neq 0$.

Eine Wurzelfunktion umkehren

Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = \sqrt{x} + 2$ mit Definitionsbereich $[0, \infty)$.

- (1) Zeigen Sie die Injektivität direkt anhand der Definition.
- (2) Bestimmen Sie die Bildmenge und begründen Sie die Wahl des Wertebereichs für Bijektivität.
- (3) Stellen Sie $y = f(x)$ nach x um und geben Sie die Umkehrfunktion einschließlich beider Mengen an.

Eigene Lösung / Rechnung:

Funktionen hintereinander ausführen

Definition 7.6 (Verkettung). Seien $f : D_f \rightarrow U$ und $g : D_g \rightarrow V$ Funktionen mit $g(D_g) \subseteq D_f$. Ihre **Verkettung** ist

$$f \circ g : D_g \rightarrow U, \quad x \mapsto f(g(x)).$$

Es wird **zuerst** g , dann f angewendet.

Bemerkung. Die Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn $g(D_g) = D_f$. Auch wenn der Wertebereich V von g mit D_f übereinstimmt, gilt sie automatisch, denn $g(D_g) \subseteq V = D_f$.

Identität und inverse Verkettung

Satz 7.2 (Regeln für Verkettung und Umkehrung). Seien $f : D_f \rightarrow U$, $g : D_g \rightarrow V$ und $h : D_h \rightarrow W$ Funktionen mit $g(D_g) \subseteq D_f$ und $f(D_f) \subseteq D_h$.

Es gilt das Assoziativgesetz

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

Ist f bijektiv, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{D_f}, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_U.$$

Sind f und g bijektiv, so ist $f \circ g : D_g \rightarrow f(g(D_g))$ bijektiv. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(f \circ g)^{-1}(y) = g^{-1}(f^{-1}(y)), \quad y \in f(g(D_g)).$$

Bei $g(D_g) = D_f$ ist dabei $f(g(D_g)) = U$.

Zwei Schritte und ihre Rückrichtung

Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$, und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. Bestimmen Sie $f \circ g$, $g \circ f$ und $(f \circ g)^{-1}$.

Eigene Lösung / Rechnung:

7.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

Zählen durch Zuordnen

Definition 7.7 (Gleichmächtigkeit und Vergleich von Mächtigkeiten). Zwei Mengen A , B heißen **gleichmächtig**, geschrieben $|A| = |B|$, wenn eine Bijektion $A \rightarrow B$ existiert.

Wir schreiben $|A| \leq |B|$, wenn eine Injektion $A \rightarrow B$ existiert.

Wir schreiben $|A| < |B|$, wenn es eine Injektion $A \rightarrow B$, aber **keine Surjektion** $A \rightarrow B$ gibt.

Unendlich und trotzdem abzählbar

Definition 7.8 (Abzählbarkeit). Eine Menge heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Sie heißt **höchstens abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Eine Menge, die nicht höchstens abzählbar ist, heißt **überabzählbar**.

Beispiel: Ganze Zahlen abzählen

Die Liste $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$ enthält jede ganze Zahl genau einmal. Eine zugehörige Bijektion ist

$$z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad z(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade,} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die rationalen Zahlen lassen sich abzählen

Satz 7.3 (Abzählbarkeit der rationalen Zahlen). Die Mengen $\mathbb{Q}_{>0}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

$\mathbb{Q}_{>0} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$ bezeichnet die Menge der **positiven rationalen Zahlen**.

Lassen sich alle endlichen Programme abzählen?

Wir betrachten alle endlichen Binärwörter $\{0, 1\}^*$. Geben Sie eine Abzählung an, die jedes Wort nach endlich vielen Schritten erreicht. Was folgt für Programme, die durch endliche Binärwörter dargestellt werden?

Eigene Lösung / Rechnung:

Die reellen Zahlen sind überabzählbar

Satz 7.4 (Überabzählbarkeit des Einheitsintervalls). Das Intervall $(0, 1)$ ist überabzählbar. Damit ist auch $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Cantors Diagonalargument in Dezimaldarstellung

Angenommen, $x_1, x_2, \dots$ wäre eine vollständige Abzählung von $(0, 1)$. Schreiben Sie $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$ ohne unendliche Neunerfolge. Konstruieren Sie eine Dezimalzahl $z \in (0, 1)$, die von jedem x_n abweicht, und führen Sie damit die Annahme zum Widerspruch.

Eigene Lösung / Rechnung:

Die Potenzmenge ist stets mächtiger

Satz 7.5 (Cantors Potenzmengensatz). Für jede Menge M gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Mehrere Größen des Unendlichen

Satz 7.6 (Mächtigkeit des Kontinuums). Es gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |(0, 1)| = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Die Gleichheiten mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ verwenden wir ohne Beweis.

Teilmengen als unendliche Bitfolgen

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist dadurch bestimmt, welche natürlichen Zahlen zu ihr gehören. Diese Information speichern wir in einer **unendlichen Bitfolge**:

$$A \mapsto (b_1, b_2, b_3, \dots), \quad b_n = \begin{cases} 1, & n \in A, \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

Zum Beispiel entspricht $A = \{1, 3, 4\}$ der Folge $(1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

Umgekehrt erhalten wir aus jeder Bitfolge genau eine Teilmenge: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = 1\}$. Die Zuordnung ist also eine **Bijektion**.

Mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir die Menge aller unendlichen Bitfolgen. Damit gilt

$$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|.$$

Alle **endlichen** Binärwörter lassen sich abzählen; die Menge aller **unendlichen** Bitfolgen ist dagegen überabzählbar.

Von Bitfolgen zu reellen Zahlen

Eine unendliche Bitfolge erinnert an die Nachkommastellen einer Binärzahl. Es liegt daher nahe, $(b_1, b_2, \dots)$ als $0, b_1 b_2 \dots_2$ zu lesen. So erhält man eine reelle Zahl in $[0, 1]$.

Diese Zuordnung ist jedoch **nicht injektiv**, denn zum Beispiel gilt

$$0,1000 \dots_2 = 0,0111 \dots_2.$$

Zwei verschiedene Bitfolgen stellen hier dieselbe Zahl dar. Das bloße Lesen als Binärzahl liefert deshalb noch keine Bijektion.

Die Gleichmächtigkeit von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $[0, 1]$ gilt dennoch; den Beweis führen wir hier nicht aus. Wir erhalten damit die Gleichheit der Mächtigkeiten

$$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |[0, 1]| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|.$$

Teilmengen von $\mathbb{N}$, unendliche Bitfolgen und reelle Zahlen haben also dieselbe Mächtigkeit, die **Mächtigkeit des Kontinuums**.

Es gibt keine größte Mächtigkeit

Cantors Potenzmengensatz gilt für **jede** Menge, also auch für eine Menge, die selbst schon eine Potenzmenge ist. Wir können ihn deshalb wiederholt anwenden:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots.$$

Der erste Schritt führt von der abzählbaren Menge $\mathbb{N}$ zur Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Schon der nächste Schritt liefert eine Menge, die **mächtiger als** $\mathbb{R}$ ist. Überabzählbare Mengen können somit unterschiedliche Mächtigkeiten besitzen.

Das Verfahren lässt sich immer weiter fortsetzen. Es gibt also **keine größte Mächtigkeit**: Zu jeder Menge M besitzt $\mathcal{P}(M)$ eine strikt größere Mächtigkeit.

7.5 Polynome

Vom Polynom zur reellen Funktion

Definition 7.9 (Reelle Polynomfunktion). Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiert die **Polynomfunktion**

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Der **Grad** eines Polynoms $p \neq 0$, geschrieben $\deg(p)$, ist der größte Exponent mit einem von null verschiedenen Koeffizienten. Ist $a_n \neq 0$, so gilt also $\deg(p) = n$. Eine von null verschiedene Konstante hat Grad 0; dem Nullpolynom ordnen wir hier keinen Grad zu.

Als Funktion kann p auch auf eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ eingeschränkt werden.

Welche Funktionen sind Polynomfunktionen?

Entscheiden Sie jeweils und begründen Sie Ihre Antwort. Jede Funktion wird auf ihrem maximalen reellen Definitionsbereich betrachtet.

1. $f_1(x) = 3x^4 - 2x + 1$
2. $f_2(x) = \sqrt{2}x^2 - \pi$
3. $f_3(x) = (x-1)(x+2)$
4. $f_4(x) = 5$
5. $f_5(x) = 0$
6. $f_6(x) = x^{-2} + 1$
7. $f_7(x) = \sqrt{x} + 2$
8. $f_8(x) = 2^x$

Nullstellen und Vorzeichen

Definition 7.10 (Nullstelle einer Funktion). Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle** von f , wenn

$$f(x_0) = 0.$$

Geometrisch sind die Nullstellen die x -Koordinaten der Punkte, an denen der Graph die x -Achse trifft: $(x_0, 0)$ liegt auf dem Graphen von f .

Fundamentalsatz der Algebra — bereits bekannt aus Kapitel 5.5.

Für jedes Polynom

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

existieren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$p(z) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Mit Vielfachheiten gezählt besitzt p also **genau n komplexe Nullstellen** und damit **höchstens n verschiedene reelle Nullstellen**.

Satz 7.7 (Vielfachheit und Vorzeichenwechsel). Ist x_0 eine reelle Nullstelle eines von null verschiedenen Polynoms und

$$p(x) = (x - x_0)^k r(x), \quad r(x_0) \neq 0,$$

so wechselt p an x_0 genau dann das Vorzeichen, wenn k ungerade ist.

Der führende Term für große Beträge von x

Sei $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ mit reellen Koeffizienten, $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. Wir vergleichen $p(x)$ mit seinem **führenden Term** $a_n x^n$ und setzen

$$C = \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|}.$$

Für alle $|x| \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$\frac{|p(x) - a_n x^n|}{|a_n x^n|} \leq \frac{C}{|x|}.$$

Die linke Seite ist die **relative Abweichung, bezogen auf den führenden Term**. Die rechte Seite gibt dafür eine konkrete obere Schranke an.

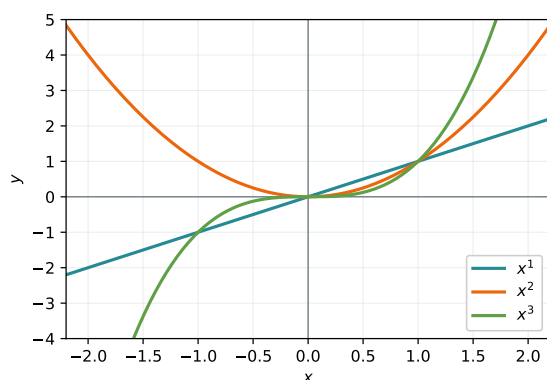
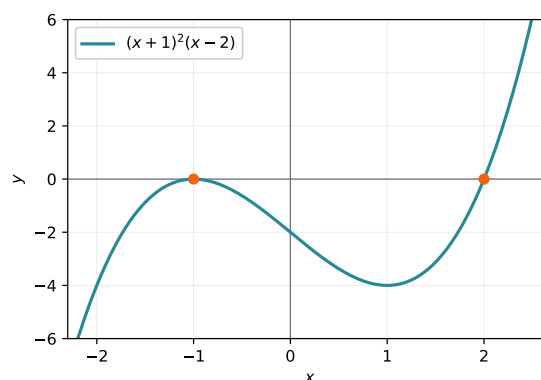
Zum Beispiel beträgt die relative Abweichung für $|x| \geq \max\{1, 100C\}$ höchstens $\frac{1}{100}$, also **1 %**.

Grundform, Streckung und Verschiebung

Bei $f(x) = a(x - h)^n + k$ mit $a \neq 0$ gilt:

- h verschiebt den Graphen horizontal, k vertikal.
- $|a|$ streckt oder staucht vertikal; $a < 0$ spiegelt zusätzlich an der horizontalen Achse.
- Ein gerades n ergibt Achsensymmetrie zu $x = h$, ein ungerades n Punktsymmetrie zum Punkt (h, k) .

Potenzen und Nullstellen im Graphen



Was verraten die Faktoren?

Gegeben ist $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = -2x(x-3)^2$. Bestimmen Sie Grad, führenden Koeffizienten und Nullstellen mit Vielfachheit. An welcher Nullstelle wechselt das Vorzeichen? Welche Nullstellen bleiben bei Einschränkung auf den Definitionsbereich $D = [1, \infty)$ erhalten?

Eigene Lösung / Rechnung:

7.6 Gebrochenrationale Funktionen

Der Nenner begrenzt die erlaubten Argumente

Definition 7.11 (Gebrochenrationale Funktion). Sind p, q reelle Polynome mit $q \neq 0$, so definiert

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\},$$

eine **gebrochenrationale Funktion**. Einschränkungen von D sind möglich. Für $p \neq 0$ heißt sie **echt gebrochen**, wenn $\deg p < \deg q$, sonst **unecht gebrochen**. Die Nullfunktion zählt ebenfalls als echt gebrochen.

Kürzen verändert den ursprünglichen Definitionsbereich nicht

Definition 7.12 (Polstelle und hebbare Lücke). Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochenrationale Funktion, wobei p, q reelle Polynome und $q \neq 0$ sind. Wir betrachten den maximalen Definitionsbereich $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Nenners q .

- Bleibt nach vollständigem Kürzen ein Nennerfaktor $(x - x_0)^m, m \geq 1$, übrig, so ist x_0 eine **Polstelle der Ordnung** m . Nähert sich x dem Wert x_0 an, so wächst $|f(x)|$ unbegrenzt.
- Ist x_0 nach vollständigem Kürzen weder eine Nullstelle des Nenners, noch des Zählers, so heißt x_0 **hebbare Lücke** der gebrochenrationalen Funktion f . Setzt man x_0 in den vollständig gekürzten Bruch ein, so heißt der sich ergebende Wert **Ergänzungswert**.

Polynomanteil und Rest trennen

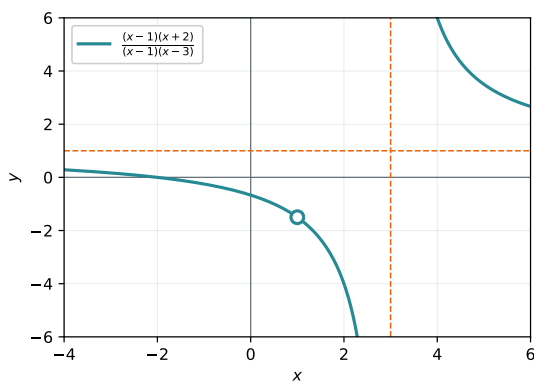
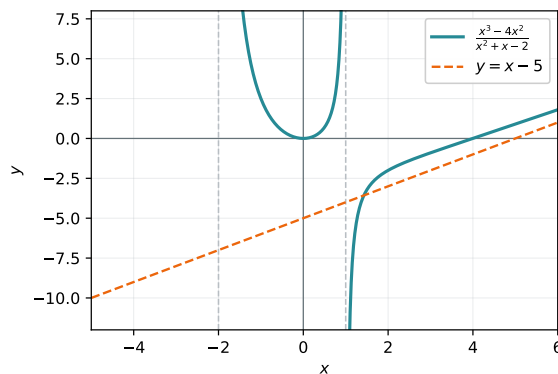
Satz 7.8 (Polynomdivision). Für reelle Polynome p und $q \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Polynome s, r mit

$$p = sq + r, \quad r = 0 \text{ oder } \deg r < \deg q.$$

Wo $q(x) \neq 0$ gilt, folgt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Zwei gebrochenrationale Graphen



Nullstellen und Pole bestimmen

Untersuchen Sie

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 + x - 2}.$$

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich, Nullstellen und Pole mit ihren Ordnungen.

Eigene Lösung / Rechnung:

Polynomdivision Schritt für Schritt

Teilen Sie $p(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 0$ durch $q(x) = x^2 + x - 2$. Bestimmen Sie den Quotienten s und den Rest r und schreiben Sie $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ als Polynomanteil plus echten Bruch.

Eigene Lösung / Rechnung:

7.7 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Monotonie

Definition 7.13 (Monotonie). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion hat die folgende Eigenschaft, falls die nebenstehende Bedingung **für alle** $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

Bezeichnung	geforderte Bedingung
monoton wachsend	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton wachsend	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	$f(x_1) > f(x_2)$

Satz 7.9 (Strenge Monotonie und Injektivität). Sei $f : D \rightarrow W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv und die Funktion $f : D \rightarrow f(D)$ ist bijektiv und umkehrbar.

Fester Exponent, veränderliche Basis

Definition 7.14 (Potenzfunktion). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt

$$P_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto x^\alpha$$

eine **Potenzfunktion**. Für $\alpha > 0$ setzen wir zusätzlich $0^\alpha := 0$ und verwenden auch die Erweiterung $P_\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Bemerkung.

- Für $\alpha > 0$ ist $x \mapsto x^\alpha$ auf $[0, \infty)$ streng wachsend und bildet diese Menge bijektiv auf $[0, \infty)$ ab.
- Für $\alpha < 0$ ist sie auf $(0, \infty)$ streng fallend und dort bijektiv auf $(0, \infty)$. Bei 0 ist sie nicht definiert.
- Für $\alpha \neq 0$ lautet die Umkehrfunktion auf der jeweiligen Bildmenge $y \mapsto y^{\frac{1}{\alpha}}$.
- Für $\alpha = 0$ ist die Funktion konstant und auf $(0, \infty)$ nicht injektiv.

Exponentialfunktion

Definition 7.15 (Exponentialfunktion). Für $b > 0$ heißt

$$E_b : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto b^x$$

eine **Exponentialfunktion**.

Wir halten ein paar wesentliche Eigenschaften fest:

Bemerkung.

- Es gilt $b^0 = 1$ und $b^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Für $b > 1$ ist $x \mapsto b^x$ streng wachsend, für $0 < b < 1$ streng fallend.
- Für $b \neq 1$ ist $x \mapsto b^x$ bijektiv von $\mathbb{R}$ auf $(0, \infty)$.
- Für $b = 1$ ist $x \mapsto b^x$ die konstante Funktion mit dem Wert 1.

Logarithmusfunktion

Definition 7.16 (Logarithmusfunktion). Für $b > 0, b \neq 1$ ist die **Logarithmusfunktion**

$$\log_b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_b x$$

die Umkehrfunktion von E_b . Für $b = e$ schreiben wir $\ln$.

Wir beschreiben wichtige Eigenschaften und den Zusammenhang zwischen Logarithmus- und Exponentialfunktion:

Bemerkung.

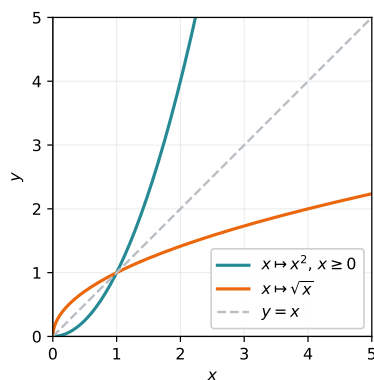
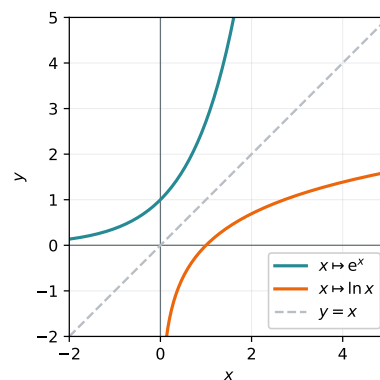
- Für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ gilt

$$\log_b y = x \iff b^x = y, \quad b^{\log_b y} = y, \quad \log_b(b^x) = x.$$

- Für $b > 1$ ist $x \mapsto \log_b x$ auf $(0, \infty)$ streng wachsend.
- Für $0 < b < 1$ ist $x \mapsto \log_b x$ auf $(0, \infty)$ streng fallend.
- Es gilt $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$.
- Für $y > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ liefern Basiswechsel und Exponentialdarstellung

$$\log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}, \quad b^x = e^{x \ln b}.$$

Wachstum und Umkehrung im Graphen



Schritte im Suchverfahren

Ein idealisiertes Suchverfahren halbiert in jedem Schritt die Zahl verbleibender Kandidaten. Anfangs sind es 4096. Nach k Schritten modellieren wir

$$N(k) = 4096 \cdot 2^{-k}.$$

Wann sind höchstens 16 Kandidaten übrig? Ist die Funktion N wachsend oder fallend?

Eigene Lösung / Rechnung:

7.8 Trigonometrische Funktionen

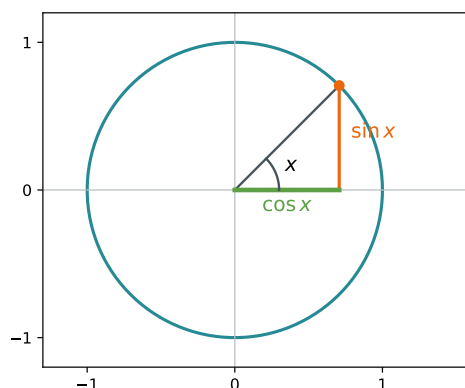
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Definition 7.17 (Sinus und Kosinus). Vom Punkt $(1, 0)$ aus gehen wir auf dem Einheitskreis um den Winkel x , positiv gegen den Uhrzeigersinn. Die Koordinaten des erreichten Punkts $P(x)$ bezeichnen wir mit Kosinus und Sinus von x also

$$P(x) = (\cos x, \sin x).$$

Damit sind $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ definiert.

Ein Winkel und zwei Koordinaten



Tangens und Kotangens

Definition 7.18 (Tangens und Kotangens). Auf den Definitionsbereichen

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

definieren wir **Tangens** und **Kotangens** durch

$$\begin{aligned} \tan : D_{\tan} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \cot : D_{\cot} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Tangens und Kotangens besitzen jeweils die Bildmenge $\mathbb{R}$.

Periodizität und Symmetrie

Definition 7.19 (Periodizität). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch**, wenn ein $T > 0$ mit $D + T = D$ und

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D$$

existiert. Jedes solche T heißt Periode. Existiert eine kleinste positive Periode, so heißt sie **Grundperiode**.

Definition 7.20 (Gerade und ungerade Funktion). Sei $D = -D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt;
- **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Hier ist $-D = \{-d \mid d \in D\}$. Die Bedingung $D = -D$ heißt also $d \in D \Leftrightarrow -d \in D$. Dies stellt sicher, dass alle Funktionswerte die man die Symmetrie prüfen muss auch wirklich berechnet werden können.

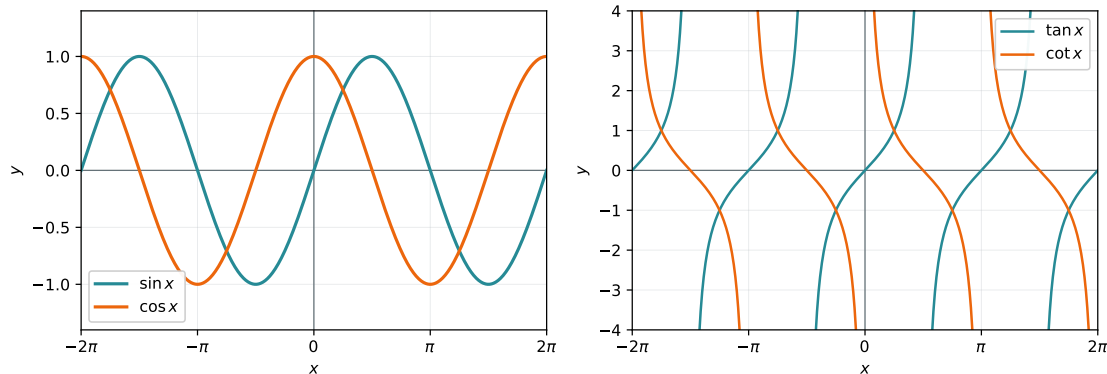
Bemerkung. Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse; der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eigenschaften der vier trigonometrischen Funktionen

Funktion	Bildmenge	Grundperiode	Symmetrie	Nullstellen, $k \in \mathbb{Z}$
sin	$[-1, 1]$	2π	ungerade	$k\pi$
cos	$[-1, 1]$	2π	gerade	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
tan	$\mathbb{R}$	π	ungerade	$k\pi$
cot	$\mathbb{R}$	π	ungerade	$\frac{\pi}{2} + k\pi$

Funktion	Bildmenge	Grundperiode	Symmetrie	Nullstellen, $k \in \mathbb{Z}$
----------	-----------	--------------	-----------	------------------------------------

Periodische Graphen



Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus

Satz 7.10 (Trigonometrische Identitäten). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Insbesondere: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ und $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

Es gibt viele weitere trigonometrische Identitäten, siehe zum Beispiel [Wikipedia](#).

Zwei periodische Funktionen

Zeigen Sie die Periodizität und geben Sie die Grundperiode an:

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(4x)$.
- (2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die höchstens x ist.

Eigene Lösung / Rechnung:

Amplitude und Frequenz

Wir betrachten sinusförmige Funktionen der Form

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a \sin(\omega(x - h)) + k$$

mit $a, \omega, h, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $\omega \neq 0$.

Die Begriffe und Ableseregeln gelten ebenso mit cos statt sin.

- Die **Amplitude** A ist der größte Abstand des Graphen von seiner **Mittellinie**. Diese liegt genau zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert. Die Amplitude ist also die Hälfte der Differenz dieser Werte.
- Ist T die Grundperiode von s , so heißt $\nu = \frac{1}{T}$ die **Frequenz**. Sie gibt die Anzahl vollständiger Schwingungen pro Einheit der x -Achse an. Ist x die Zeit in Sekunden, ist ihre Einheit **Hertz (Hz)**: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ bedeutet eine vollständige Schwingung pro Sekunde.

Parameter eines sinusförmigen Signals

Für die oben betrachtete Funktion s gilt die folgende Übersicht.

$$s(x) = a \sin(\omega(x - h)) + k.$$

Größe	An den Parametern ablesen
Amplitude	$A = a $
Grundperiode	$T = \frac{2\pi}{ \omega }$
Frequenz	$\nu = \frac{1}{T} = \frac{ \omega }{2\pi}$
Mittellinie	$y = k$; Verschiebung um k in y -Richtung
Verschiebung in x -Richtung	Um $ h $: $h > 0$ rechts, $h < 0$ links

Ist x die Zeit in Sekunden, wird T in Sekunden und ν in Hertz angegeben.

7.9 Hyperbelfunktionen

Aus Exponentialfunktionen zusammengesetzt

Definition 7.21 (Hyperbelfunktionen). **Hyperbelkosinus** und **Hyperbelsinus** sind die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hyperbeltangens und **Hyperbelkotangens** sind die Funktionen $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tanh(x) := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth(x) := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Warum „Hyperbel“?

Satz 7.11 (Hyperbelidentität). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

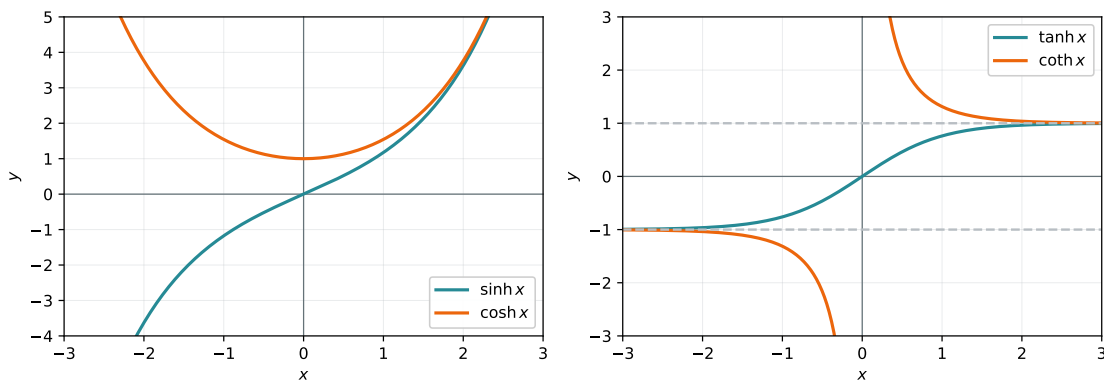
$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \cosh x + \sinh x &= e^x, \\ \cosh x - \sinh x &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Der Punkt $(\cosh x, \sinh x)$ liegt auf dem rechten Ast der Hyperbel $u^2 - v^2 = 1$.

Bildmengen und Symmetrien

Funktion	Definitionsbereich	Bildmenge	Symmetrie
$\sinh$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ungerade
$\cosh$	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	gerade
$\tanh$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	ungerade
$\coth$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	ungerade

Vier Hyperbelfunktionen im Graphen



Summen von Argumenten

Satz 7.12 (Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}.\end{aligned}$$

Die Hyperbelgleichung entwickeln

Leiten Sie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ unmittelbar aus den Definitionen her. Berechnen Sie anschließend $\sinh(\ln 2)$ und $\cosh(\ln 2)$.

Eigene Lösung / Rechnung:

7.10 Arcus- und Areafunktionen

Periodische Funktionen geeignet einschränken

Definition 7.22 (Arcusfunktionen). Die **Arcusfunktionen** sind die Umkehrfunktionen der folgenden Einschränkungen:

Umkehrfunktion	Definitionsbereich	Zielmenge	umgekehrte Einschränkung
$\arcsin$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\sin \big _{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$
$\arccos$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\cos \big _{[0, \pi]}$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan \big _{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$
arccot	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$\cot \big _{(0, \pi)}$

Sinus und Arcussinus verketteten

- Für jedes $y \in [-1, 1]$ gilt $\sin(\arcsin y) = y$.
- Die Gleichung $\arcsin(\sin x) = x$ gilt dagegen nur für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Beispielsweise ist $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0$.

Alle Lösungen einer trigonometrischen Gleichung bestimmen

Für $y \in [-1, 1]$ lauten alle Lösungen von $\sin x = y$

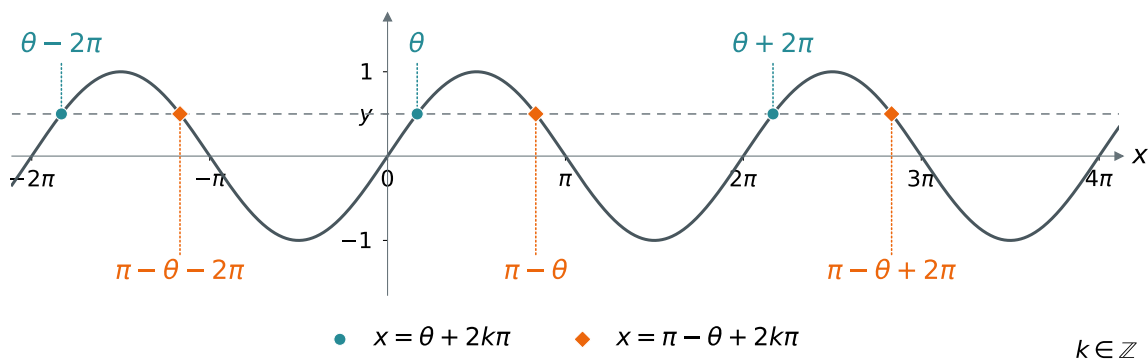
$$x = \arcsin y + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = \pi - \arcsin y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bei $y = \pm 1$ fallen die beiden Lösungsfamilien zusammen.

Zwei Lösungsfamilien im Sinusgraphen

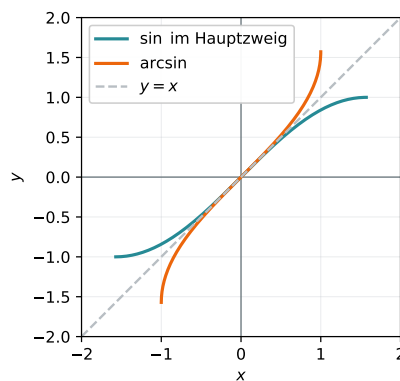
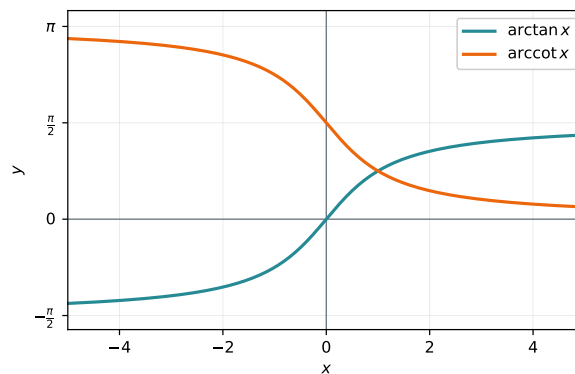
Graph von $x \mapsto \sin x$

$$\theta = \arcsin y, \quad 0 < y < 1$$



Der Hauptwert $\theta = \arcsin y$ und der gespiegelte Winkel $\pi - \theta$ liefern dieselbe Höhe y . Die Periodizität erzeugt durch Verschiebungen um $2k\pi$ die weiteren Punkte beider Farben. Die Skizze zeigt den Fall $0 < y < 1$.

Sinus umkehren und Arcuswerte vergleichen



Eine Gleichung mit beliebigem Zielwert

Für festes $y \in \mathbb{R}$ sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\tan(2x) = y$ gesucht. Wie unterscheiden sich eine Lösung und die gesamte Lösungsmenge?

Eigene Lösung / Rechnung:

Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

Definition 7.23 (Areafunktionen). Die folgenden Umkehrfunktionen heißen **Areafunktionen**:

Funktion	Definitionsbereich	Zielmenge	Umkehrfunktion von
arsinh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sinh$
arcosh	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$\cosh _{[0, \infty)}$
artanh	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$\tanh$
arcoth	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\coth$

Areafunktionen mit Logarithmen berechnen

Satz 7.13 (Logarithmusdarstellungen der Areafunktionen). Auf dem jeweiligen Definitionsbereich gilt

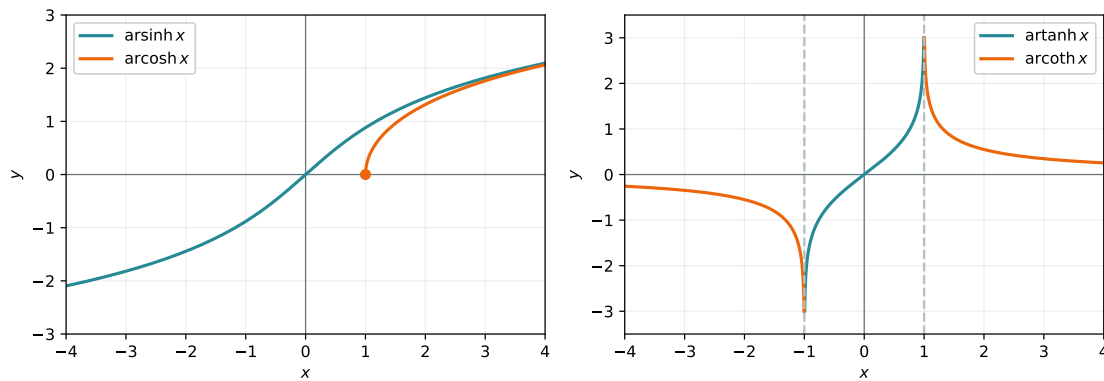
$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

Die vier Areafunktionen im Vergleich



Eine Aktivierung zurückrechnen

Eine Aktivierung lautet $y = \tanh x$. Welcher Eingang liefert $y = \frac{1}{2}$? Kann eine reelle Eingabe x die Ausgaben 1 oder 2 erzeugen?

Eigene Lösung / Rechnung: